



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM, TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

JUHÁSZ PÉTER

MTA SZTAKI

Magyarországi topográfiai térképek vetületének

torzulási vizsgálata

doktori értekezés

Témavezető:

**Györffy János**, kandidátus, egyetemi docens

**Földtudományi Doktori Iskola**

Vezetője: Dr. Monostori Miklós D.Sc, egyetemi tanár

**Térképész program**

Programvezető: Dr. Klinghammer István CMHAS, egyetemi tanár

**Budapest, 2008.**

# Tartalomjegyzék

<b>A vizsgálat célja</b>	<b>5</b>
<b>Jelölések</b>	<b>7</b>
<b>1. Általános tudnivalók</b>	<b>8</b>
1.1. A vizsgálatok alapkoncepciója . . . . .	8
1.2. Felhasznált adatok . . . . .	14
1.3. Felhasznált módszerek . . . . .	17
1.4. Programozási környezet . . . . .	17
<b>2. A magyarországi topográfiai térképezés rövid áttekintése</b>	<b>18</b>
2.1. Kettős vetítés . . . . .	18
2.2. Sztereografikus rendszerek . . . . .	19
2.3. Hengervetületek . . . . .	20
<b>3. A szögtartó gömbvetület vizsgálata</b>	<b>23</b>
3.1. Alapkövetelmények és ezek következményei . . . . .	23
3.2. Gömbvetületek optimalizálása . . . . .	26
<b>4. A sztereografikus rendszer</b>	<b>30</b>

4.1. A sztereografikus rendszer bemutatása . . . . .	30
4.2. A sztereografikus rendszer vizsgálata . . . . .	31
4.3. Ellipszoidi sztereografikus projekció . . . . .	37
<b>5. Lambert-féle szögtartó kúpvetület . . . . .</b>	<b>41</b>
5.1. Kettős vetítés . . . . .	42
5.2. Ellipszoidi kúpvetület . . . . .	47
5.3. Konklúzió . . . . .	50
<b>6. Egységes Országos Vetületi Rendszer . . . . .</b>	<b>51</b>
6.1. Az EOVS bemutatása . . . . .	51
6.2. Az EOVS vizsgálata . . . . .	54
<b>7. A Hotine-féle vetület optimális paraméterezése . . . . .</b>	<b>64</b>
7.1. A Hotine-féle vetület . . . . .	64
7.2. Az optimális paraméterezések . . . . .	70
<b>8. Komplex függvények használata . . . . .</b>	<b>76</b>
8.1. A módszer . . . . .	77
8.2. A sztereografikus vetület transzformálása . . . . .	78
<b>9. A vizsgálatok eredményének összefoglalása . . . . .</b>	<b>82</b>
9.1. Használatban lévő vetületek . . . . .	82
9.2. A redukciós konstans jelentősége . . . . .	83
9.3. Az optimális vetületek . . . . .	84
<b>10. Javíthatók ezek az eredmények? . . . . .</b>	<b>86</b>
10.1. Egyéb lehetséges módszerek . . . . .	86

---

10.2. Érdekes eredmények . . . . .	88
<b>11. Függelék</b>	<b>90</b>
11.1. Nelder-Mead „downhill simplex” módszer . . . . .	90
11.2. A Csebisev-tétel és bizonyítása . . . . .	95
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>101</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>102</b>

# A vizsgálat célja

A disszertációban Magyarországon alkalmazott polgári, topográfiai vetületeket vizsgálom meg. A vizsgálat kizárólag a hossztorzulási viszonyokra irányul. Ezen belül is a topográfiai térképeken megszokott szempontból értékelem a vetületeket, vagyis az ábrázolt területen a hossztorzulás 1-től való eltéréseinek maximuma a legfontosabb. Kevésbé precízen fogalmazva: a legkedvezőtlenebb helyen mennyit torzít a vetület. Minél kisebb ez az érték, annál jobbnak tekintjük a vetületet.

A vizsgálatot az indokolja, hogy a technika ma már lehetővé teszi, hogy ezeket az igencsak számításigényes műveleteket viszonylag kényelmesen elvégezzük. A Magyarországon korábban, illetve ma is használt topográfiai vetületi rendszerek mindig is korszerűek voltak, ami az alkalmazott módszereket illeti. Hazánkban alkalmazták először a kettős vetítést, de más téren is alkalmaztuk a modern megoldásokat. Azonban a vetületek paramétereinek optimalizálása nem jöhetett szóba, hiszen számítógép segítségével ezek a műveletek beláthatatlanul hosszúak.

Vizsgálataim során az derült ki, hogy az optimális paraméterek megtalálásával lényegesen javíthatunk a hossztorzulási viszonyokon.

A dolgozat célja, hogy a Magyarországon valaha használt, matematikailag

korrektül leírt, illetve ma használatban lévő összes topográfiai vetületet megvizsgálja abból a szempontból, hogy a vetület során használt, a vetületek alapvető szerkezetét nem befolyásoló konstans értékeket hogyan kell optimalisan megválasztani. Ezen túlmenően olyan vetületek is a vizsgálat tárgyát képezik, amelyeket nem használ és nem is használt a hazai topográfia, de nemzetközileg elterjedtek. Ez utóbbi vetületek vizsgálata azért fontos, mert így megtudjuk, hogy ezeknek a vetületeknek az esetleges magyarországi alkalmazása milyen hossztorzulási viszonyokat eredményezne.

# Jelölések

$\varphi$	gömbi pont szélessége
$\lambda$	gömbi pont hosszúsága
$\beta$	gömbi pont pólustávolsága
$\varphi'$	gömbi pont segédföldrajzi szélessége
$\lambda'$	gömbi pont segédföldrajzi hosszúsága
$\beta'$	gömbi pont segédföldrajzi pólustávolsága
$\Phi$	ellipszoidi pont szélessége
$\Lambda$	ellipszoidi pont hosszúsága
$\rho$	sík- és kúpvetületeknél a sugárfüggvény
$\bar{\lambda}$	kúpvetületeknél leképezési függvény a hosszúsági vonalakra
$a$	forgási ellipszoid félnagy tengelye
$b$	forgási ellipszoid félkistengelye
$\alpha$	forgási ellipszoid lapultsága
$e$	forgási ellipszoid numerikus excentricitása
$e'$	forgási ellipszoid második excentricitása
$M$	forgási ellipszoid paralelkör menti görbülete
$N$	forgási ellipszoid harántgörbülete
$\partial_x f$	az $f$ függvény $x$ változó szerinti parciális deriváltja

# 1. fejezet

## Általános tudnivalók

### 1.1. A vizsgálatok alapkoncepciója

A kutatásom során több vetületi rendszert vizsgáltam meg alaposan a hossztorzulási viszonyok szempontjából.

Szögtartó vetületek esetében (amilyenek a korszerű topográfiai vetületek) a torzulási viszonyokat jól át tudjuk tekinteni pusztán a hossztorzulás ismeretében. Nyilván szögtorzulás nem lép fel. Ezen kívül más vetületekkel ellentétben a szögtartó vetületeknél a lineármodulus nem függ az iránytól, és a területtorzulási modulust a lineármodulus négyzete adja. Ezért a vizsgálatok során csak a hossztorzulást tartottam szem előtt.

Ezek a vizsgálatok a vetületi rendszerek alapvető különbségei miatt természetesen különböznek egymástól, de az alapkoncepció minden esetben megegyezik. Erről a közös gondolatról szól ez a fejezet.



### 1.1.1. Topográfiai vetületek

A vetületek torzulási vizsgálata tisztán matematikai alapokon elvégezhető. Egy ilyen vizsgálat nem veszi figyelembe a topográfia által támasztott általános követelményeket, de ezektől eltekintve objektív módon tudja értékelni a vetületeket. Emiatt érdemes matematikailag szabatosan megfogalmazni a problémát.

A topográfiai vetületeket és vetületi rendszereket tekinthetjük olyan valós függvényeknek, amiknek értelmezési tartománya a  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times (-\pi, \pi]$  tartomány, az értékkészlet pedig része  $\mathbb{R}^2$ -nek. Ez azért igaz, hiszen mind a gömböt, mint pedig a forgási ellipszoidot koordinátázhatjuk a megszokott földrajzi szélességgel ( $\varphi$ , illetve  $\Phi$ ), illetve hosszúsággal ( $\lambda$ , illetve  $\Lambda$ ). Márpedig a szélesség értelmezési tartománya  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , a hosszúságé pedig  $(-\pi, \pi]$ . A vetületek mind síkbafejthető felületre képeznek, így azokat praktikusán síknak tekinthetjük, ezért jogos annak feltevése, hogy a függvények értékkészlete része  $\mathbb{R}^2$ -nek, vagyis a síknak. (A vizsgálat során minden esetben forgási ellipszoidot választunk alapfelületnek, így mostantól ezt rögzítjük, ezért ebben a fejezetben az alapfelület koordinátázása  $\Phi$ -vel és  $\Lambda$ -val történik.)

Ha ezt elfogadjuk, akkor a vetületeket kis latin betűkkel jelöljük, mint a függvényeket:  $f, g, h \dots$ . A fentiek alapján a szokásos jelöléseket használva:

$$f, g, h : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Előfordulhat bizonyos vetületek esetében, hogy nem rendelnek a Föld minden pontjához képpontot, de ettől most tekintsünk el, hiszen a vizsgálat szempontjából csak az lényeges, hogy a vetületek Magyarország területén értelmezve vannak.

Mivel ezek a függvények topográfiai vetületeket testesítenek meg, így megfelelnek néhány fontos kritériumnak. Egyrészt kétszer folytonosan differenciálhatóak a függvények, másrészt pedig szögtartóak. Ezen kívül meg kell felelni egyéb fontos követelményeknek is, szükséges például a lineármódulus, az irányredukció és a vetületi meridiánkonvergencia számítására alkalmas képlet.

### 1.1.2. A lineármódulus

A vetületek hossztorzulását a *lineármódulussal* jellemezzük, ami a hossz változatlansága esetén 1, hosszrövidülés esetén 1-nél kisebb, hossznagyobbodáskor 1-nél nagyobb.

A szögtartás matematikai szempontból azt jelenti, hogy a lineármódulus értéke az iránytól nem függ, vagyis egy pontban a hossztorzulást egyetlen számmal ki lehet fejezni. (Szögtorzulás nem lép fel sehol, a területtorzulási modulus pedig a lineármódulus négyzete.)

A lineármódulus értéke ebben az esetben mind a paralelkör menti, mind pedig a meridián menti hossztorzulás alapján számítható, hiszen ezek épp a szögtartás miatt egyenlők. Jelöljük a lineármódulus függvényét  $l$ -lel, ekkor:

$$\begin{aligned} l(\Phi, \Lambda) &= \frac{\sqrt{(\partial_{\Lambda} x)^2 + (\partial_{\Lambda} y)^2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}{\cos \Phi} = \\ &= \frac{\sqrt{(\partial_{\Phi} x)^2 + (\partial_{\Phi} y)^2} (1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{\frac{3}{2}}}{1 - e^2}. \end{aligned}$$

ahol  $x(\Phi, \Lambda)$  és  $y(\Phi, \Lambda)$  jelöli a vetület megszkott koordinátáfüggvényeit.

Fontos megemlíteni, hogy Fasching Antal megfogalmazott egy elméleti elvárását a topográfiai térképekkel szemben, mégpedig, hogy a lineármódulus

értéke sehol se térjen el  $1/10\,000$ -nél jobban az 1-től [Fasching, 1909]. A gyakorlatban használt rendszerek nem teljesítik ezt az elvárást, ezért fontos elméleti kérdés, hogy egyáltalán Magyarország területén teljesíthető-e ez.

### 1.1.3. Vetületek összehasonlítása

A vetületeket optimalizálásáról szól a disszertáció, ezért szükséges tisztázni azt, hogy két vetületet hogyan tudunk összehasonlítani. A megelőző fejezetekben megfogalmazott matematikai modellt és annak jelöléseit használom itt is.

Az optimalizálás azt jelenti, hogy megkeressük a legkedvezőbb vetületet az adott körülmények között. Ehhez viszont szükség van arra, hogy objektív módon meg tudjuk mondani, hogy két vetület közül melyiket tekintjük jobbnak. Az objektivitást itt csak abban az értelemben használom, hogy jól definiált az összehasonlítás, tehát nyugodtan lehetne a viszonyításnak más definíciója is. Persze érdemes olyan definíciót választani, ami gyakorlati szempontból is védhető, indokolható.

A kérdés tehát az, hogy ebben a vizsgálatban hogyan vetünk össze két vetületet. Legyen  $f_1$  és  $f_2$  két vetület, melyek értelmezési tartománya tartalmazza Magyarország területét. Tekintsük mindkét vetület esetén a hossztorzulás értékeket az ország területének minden pontjában. Formálisan ez az

$$\{l_{f_1}(\Phi, \Lambda) | (\Phi, \Lambda) \in H_0\} \text{ és } \{l_{f_2}(\Phi, \Lambda) | (\Phi, \Lambda) \in H_0\}$$

halmazokat jelenti, ahol  $H_0$  a jelenlegi ország területén lévő pontok halmaza.

Vezessük be a

$$\xi(\Phi, \Lambda) = |1 - l(\Phi, \Lambda)|$$

jelölést. Ez azért fontos mérőszám, mert pusztán a hossztorzulás értékének nagyságával nem érdemes mérni a torzulás kedvezőtlen mivoltát az adott pontban, mivel az  $l$  kis értéke is épp annyira kedvezőtlen, mint ha  $l$  nagy. Optimális esetben  $l$  értéke 1, ezért sokkal pontosabb képet ad az 1-től való eltérés, amit  $\xi$  elég jól fejez ki.

Mind az  $l$ , mind a  $\xi$  függvény függ természetesen az adott vetülettől, ezért az egyértelműség kedvéért a vetületet reprezentáló függvény ( $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  stb.) indexben megjelenik az  $l$ , illetve  $\xi$  függvényekben. Például, ha  $f$  az EOV-t jelenti, akkor  $\xi_f$  függvény adja meg az ország összes pontjában az EOV vetület által teremtetett hossztorzulás 1-től való eltérésének értékét.

Akkor kényelmes két vetületet összehasonlítani, ha a vetület számunkra fontos tulajdonságait egyetlen számba tudjuk sűríteni. Ekkor ugyanis már két valós számunk van a két vetület esetén, és a két valós szám viszonya meghatározza a két vetület viszonyát is. A  $\xi_f(\Phi, \Lambda)$  értékek alapján több alternatíva is elképzelhető arra, hogy hogyan sűrítsük a lényeges információt egyetlen értékbe. Azonban a topográfiai vetületeknél az a legfontosabb szempont, hogy az ábrázolt területen a legkedvezőtlenebb torzulású pont lineármódulusa is minél kedvezőbb legyen. A hossztorzulás kedvezőtlenségét a  $\xi_f$  nagysága fejezi ki, ennek megfelelően annál jobb egy vetület, minél kisebb a  $\xi_f$  értékek maximuma az ábrázolt területen. Hiszen ez a maximum mutatja, hogy a legkedvezőtlenebb esetben mennyivel tér el a lineármódulus értéke 1-től.

Definiáljuk tehát az optimalizálás szempontjából központi szerepet játszó értéket:

$$\xi_f^* = \max \{ \xi_f(\Phi, \Lambda) | (\Phi, \Lambda) \in H_0 \}$$

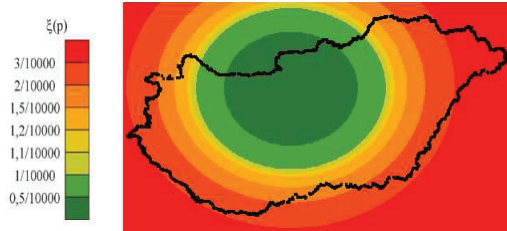
Ez tehát az a szám, amit egy  $f$  vetülethez hozzárendelünk és ezen hozzárendelt értékek alapján hasonlítunk össze két vetületet. Egy topográfiai vetület esetén az a jó, ha  $\xi^*$  értéke minél kisebb, így az összehasonlításban is ez a szempont szerepel. Ezek alapján tehát az  $f_1$  vetület kedvezőbb, mint az  $f_2$ , ha  $\xi_{f_1}^* < \xi_{f_2}^*$ .

A vetületek fenti összehasonlítási módszerét alapul véve határoztam meg az adott vetületcsaládok optimális tagját. A vetületcsalád úgy keletkezik egy adott vetületből, hogy paraméternek tekintem azokat a konstansokat (normálszélesség, redukciós konstans stb.), amelyek alapvetően nem befolyásolják a leképezés szerkezetét.

#### 1.1.4. Izovonalas térképek

A vetületek hossztorzulási viszonyait a disszertációban sok helyen izovonalas térképpel jellemzem. Ennek segítségével vizuálisan is jól áttekinthetők ezek a viszonyok. A térképek Magyarország területén mutatják be  $\xi_f$  értékeit. Ahol  $\xi_f$  értéke 0,5/10 000 alatt marad, ott ez nagyon kedvezőnek mondható, ezeket a területeket sötétzöld színnel jelöltem. Azok a pontok is megfelelnek az elvárásainknak, ahol ez az érték 1/10 000 alatt marad, ez a sáv zöld színt kapott. Ennél nagyobb  $\xi_f$  értékek már nem annyira megnyugtatóak, így a színskála inntől a sárgán át a pirosig terjed, ez utóbbi már a kifejezetten kedvezőtlen torzulási viszonyokat jelzi.

A sztereografikus vetületen alapuló Budapesti Rendszer ilyen típusú térképe (az 1.1. ábra) könnyen érthetővé teszi a fentieket.



1.1. ábra. A  $\xi$  értékeket bemutató izovonalas térkép

Ezen jól látszik a sokat emlegetett 127 km sugarú kör is (zöld színnel), amin belül  $1/10\,000$  alatt marad  $\xi$  értéke.

## 1.2. Felhasznált adatok

### 1.2.1. Határpontok

A vetületi rendszerek vizsgálata során szükségem volt egy ponthalmazra, ami alapját képezte az egyes rendszerek optimalizálásának.

A ponthalmaz egyik részét a FÖMI által oktatási célokra rendelkezésre bocsátott adatok képezik. Ez egy 2885 pontból álló lista, ami az országhatár pontjainak EOV-koordinátáit tartalmazza. Ezek a pontok  $\pm 1$  m pontosságúak, és úgy van az országhatár generalizálva, hogy a ritkított ponthalmaz által kifeszített poligon sehol sem tér el 20 m-nél jobban a valódi országhatártól.

Henger- és kúpvetületek esetén ez az adatbázis megfelelő az optimalizálás

elvégzéséhez, a sztereografikus vetület esetén azonban ezt ki kell egészíteni. Az előbbieknél ugyanis a legkedvezőtlenebb torzulású pontokat tartalmazó izovonalak mindenképpen metszik az országhatárt, a sztereografikus rendszer esetén azonban ez nem garantált. Ennek megfelelően itt egy rácshálózatra van szükség az ország területének belsejében. A kiegészítő pontthalmaz ennek alapján úgy keletkezett, hogy az ország középső részét egyenletesen, ellipszoidi szélesség és hosszúság szerint is 0,001 radiánonként felosztva, egy rácsponthalmazt kapunk. Ezekkel a pontokkal bővítettem az országhatár pontjait, az így kapott halmaz képezte ezeknél a vetületeknél a számítás alapját.

Az optimalizáló algoritmus a vetületcsaládtól függő pontthalmaz pontjaiban számította ki a hossztorzulást, ezen értékek alapján kereste a minimumot.

Mivel a számítás numerikus módszerekkel történik, így egy adott  $f$  vetület esetén a  $\xi_f$  függvény maximumhelye szinte biztosan nem a vizsgált pontthalmaz pontjaiból kerül ki. Azonban a pontthalmaz sűrűsége kellően nagy ahhoz, hogy ez az elvi probléma praktikusán nem jelent gondot, hiszen a maximumhelyhez legfeljebb 0,001 radián távolságban van pontja a pontthalmaznak, és ezen a kis távolságon nem változik lényegesen  $\xi_f$  értéke. Így a maximum értéke is nagyon nagy pontossággal megkapható ezzel a módszerrel.

Az adott vetület  $\xi_f$  értékeinek maximumát kiszámítva pedig már alkalmazhatók a többváltozós szélsőérték keresés különböző módszerei.

### 1.2.2. Határpontok konvertálása

Az eredetileg rendelkezésre bocsátott határponthalmaz koordinátái EOV koordináták voltak. Ezekből kellett a megfelelő alapfelületi pontokat kiszámítani. Elsőként meghatároztam az EOV inverz egyenletei alapján (interpolálás felhasználásával) a pontok koordinátáit az IUGG'67 ellipszoidon. Ezek alapján történt az IUGG'67 ellipszoid alapfelületű vetületek optimalizálása. Ugyanezt az adathalmazt lehetett használni abban a két esetben, amikor a ferdetengelyű kúpvetület és a Hotine-vetület optimalizálása történt, IUGG'67 ellipszoidi alapfelületet feltételezve.

A pontok Bessel-ellipszoidi koordinátáira is szükségem volt a sztereografikus rendszer optimalizálása miatt. Györffy Jánostól kaptam meg ezeket az adatokat, amik úgy keletkeztek, hogy az EOV koordináták alapján polinomos síktranszformációval konvertálta a pontokat.

Végül szükség volt a határpontok WGS'84 koordinátáira is, hiszen a ferdetengelyű kúpvetület és a Hotine-vetület esetén ez a korszerűbb megközelítés. Ezt a konverziót Téglásy Örs HunGPS nevű alkalmazásával végeztem el [Téglásy, 2001], az eredeti pontokat az ellipszoid felületén feltételezve, vagyis 0 magassági adattal ellátva. Ez az algoritmus harmadfokú térbeli polinomok segítségével végzi el a konverziót. A konverzió pontossága messze meghaladja az én vizsgálatom által támasztott követelményeket, így ez tökéletesen megfelelt a célnak.



## 1.3. Felhasznált módszerek

### 1.3.1. A „downhill simplex” módszer

A „downhill simplex” módszer egy széles körben használt, nem-lineáris, szélsőérték keresési algoritmus. Az algoritmust elsőként John A. Nelder és Roger Mead publikálta [Nelder, Mead, 1965]. A módszer előnye, hogy csak a függvény helyettesítési értékeit használja a szélsőérték kereséséhez. A leghatékonyabb többváltozós módszerek a differenciálhányadosok értékét is felhasználják, de ezek a vizsgálat alá vont vetületek esetében a legtöbbször nem álltak rendelkezésre. A „downhill simplex” módszer nem használja a deriváltakat, így ez bizonyult a leghatékonyabb algoritmusnak. Mivel a kutatásaim során sokszor használtam ezt az algoritmust, ezért a Függelék tartalmazza a módszer lényegének leírását.

## 1.4. Programozási környezet

Az optimalizálási számításokat, azok nagy számítási igénye miatt számítógéppel végeztem. Visual Studio 2005 fejlesztői környezetben, .NET Framework 3.0 keretrendszer felhasználásával, C# nyelven készültek az alkalmazások.

A matematikai számításokhoz nagy segítségemre volt az Extreme Optimization cég (<http://extremeoptimization.com>) Numerical Libraries for .NET 2.0 csomagja. Ebben egy hatékony implementációja található az előző fejezetben említett Nelder-Mead féle „downhill simplex” módszernek.

Az elkészített programok kis átalakítással egyéb vetületcsaládok optimalizálását is lehetővé teszik.

## 2. fejezet

# A magyarországi topográfiai térképezés rövid áttekintése

Magyarországon a topográfiai térképezésben több alapfelületet és több vetületet, vetületi rendszert használtak.

A Monarchia idejében négy katonai felmérés zajlott, különböző vetületeket használva. A kezdeti időszakban nem használtak mai szemmel korszerű vetülettani hátteret, így ezek a rendszerek nem képezik vizsgálatom tárgyát. A második katonai felméréstől kezdve ellipszoid alapfelületet használnak a magyarországi vetületi rendszerek.

### 2.1. Kettős vetítés

A kettős vetítés alapgondolata az, hogy az ellipszoidról nem egy lépésben vetítünk a síkra (vagy egyéb síkbafejthető felületre), hanem közbeiktatunk egy gömböt [Bugayevskiy, Snyder, 1995]. Azért szerencsés a gömbre áttérni,

mert a gömb síkra vetítésének képletei lényegesen egyszerűbbek, mint ellipszoid esetén a megfelelő képletek.

Topográfiai alkalmazás esetén az ellipszoidról a gömbre szögtartó módon térünk át. Ezeket a vetületeket nevezzük szögtartó gömbvetületeknek (ld. 3. fejezet). Ha a gömbről a síkra is szögtartó vetületet alkalmazunk, akkor természetesen az egész vetület (az ellipszoidról a síkra) is szögtartó marad. Így a meglévő gömbi koordinátákra különböző szögtartó vetületek esetén érvényes képleteket kiszámítva, különböző tulajdonságú szögtartó vetületeket kapunk.

## 2.2. Sztereografikus rendszerek

A kettős vetítés elvét kezdetben sztereografikus síkvetülettel alkalmazták. A sztereografikus vetület előnye az, hogy kielégíti a szögtartóság feltételét, viszont a vetületi egyenletei nagyon egyszerűek.

A sztereografikus vetület sajátja, hogy a kezdőpont közelében nagyon kedvezőek a torzulások, azonban távolodva attól, egyre rosszabbak. Kedvező torzulási viszonyokat nem lehetett biztosítani a teljes ábrázolni kívánt területen, ezért több kezdőpontot is bevezettek. A budai és a marosvásárhelyi kezdőpontú rendszert használták. Érdemes megemlíteni, hogy a szakirodalomban az 1930-as évektől megjelent az a tény, hogy három sztereografikus rendszer volt a történelmi Magyarországon. Az előbb említett két kezdőpont mellett a felsorolásokban megjelent az ivaniçi rendszer is. Ám a legfrissebb kutatások azt támasztják alá, hogy nem véletlenül nem szerepelt korábban ez a rendszer, ugyanis ilyen rendszerben nem történtek mérések [Varga, 2005].

## 2.3. Hengervetületek

A topográfiai térképeknek kezdetben nem voltak kialakult vetületi követelményei. Kis idő elteltével a tájékozódást jobban elősegítendő széleskörben elterjedt a szögtartó vetületek használata. Ma már szinte elképzelhetetlen, hogy ne szögtartó vetületet alkalmazzanak topográfiai célokra. Ma már az is egyre nagyobb teret hódít, hogy ne csak szögtartó, de lehetőleg hengervetület is legyen [Varga]. A szögtartó hengervetületet (Mercator-vetület) alkalmazzák érintő, és metsző vagy más néven redukált módon is. Ez utóbbi a teljes ábrázolt területen kedvezőbb torzulási tulajdonságokat ad. Ennek oka, hogy ha érintő vetületet alkalmazunk, akkor a hossztorzulási értékek mindenhol legalább 1-et adnak, vagyis csak pozitív irányban térnek el az optimumtól. Ha viszont redukált vetületet alkalmazunk, és a torzulásmentes görbék az ábrázolt területen jó helyen haladnak, akkor a maximális torzulás értéke csökkenthető, hiszen lesznek olyan területek, ahol hosszrövidülés mutatkozik, míg lesznek olyanok is, ahol hossznagyobbodás. De ez utóbbi terület mindenképpen kisebb lesz, mint érintő esetben (hiszen ott az egész terület ilyen a torzulásmentes görbét leszámítva), és ha jól választjuk meg a redukció mértékét, a minimális hossztorzulás értékének különbsége az 1-től (abszolút értékben) nagyjából megegyezik a maximális hossztorzulás hasonló mutatójával.

Érdemes már itt leszögezni, hogy az „érintő”, „metsző” illetve a „süllyesztett” („redukált”) szavak használata nem teljesen indokolt, hiszen nincsen szó perspektív vetületekről. Vagyis egy képletekkel megadott transzformáció írja le a vetítést, ami geometriai vetítésként nem feltétlenül valósítható

meg. Ennek ellenére a könnyebb elképzelést segítő használhatjuk a fenti jelzőket.

### 2.3.1. Ferdetengelyű hengervetületi rendszerek

1908-ban Fasching Antal munkájának köszönhetően a sztereografikus vetület helyett áttértek a hengervetületek használatára.

Az „érintő” hengervetületek jellemzője, hogy a (segéd)egyenlítő mentén torzulásmentes az ábrázolás, míg attól távolodva nő a torzulások értéke. Az azonos torzulású pontok itt a segédegyenlítő képével párhuzamos egyeneseket alkotnak. Ennek következtében a topográfiai vetületeknél az elvárt torzulást nem meghaladó értékek egy „sávban” helyezkednek el. (A hengervetület esetében 90 km-re az érintő főkörtől lép fel az 1,0001-es hossztorzulás.) Egy ilyen sávval nem lehetett lefedni az ország teljes területét, ezért 3 rendszert vezettek be: az északit, a középsőt és a délit (HÉR, HKR, HDR).

### 2.3.2. Gauss-Krüger vetület és az UTM

A magyarországi topográfiai vetületek történetében fontos szerepet játszik ez a két vetületi rendszer. Mindkettő katonai fejlesztés, így leginkább a katonaság használta, használja. Mivel nemzetközi rendszerek, ezért nem az ország területére lettek optimalizálva. Ennek megfelelően ezeknek a vetületeknek a vizsgálata nem tárgya ennek a dolgozatnak. Mindkét vetületi rendszer leírása megtalálható a [Stegena, 1988]-ban.

### 2.3.3. Egységes Országos Vetületi Rendszer (EOV)

Mivel a Gauss-Krüger rendszert Magyarországon katonai célokra, többnyire titkosítva használták, ezért egyre inkább szükség volt egy polgári, korszerű vetületi rendszerre. Ennek az igénynek a kielégítésére készült el 1975-re az Egységes Országos Vetületi Rendszer [MÉM OFTH, 1975], mely az Egységes Országos Térképrendszer (EOTR) vetületi alapja.

A vetület leírása részletesen megtalálható a 6.1. fejezetben.

Ez a rendszer kifejezetten magyarországi alkalmazásra készült, a redukációs tényező értékét úgy választották meg, hogy a két torzulásmentes görbe az ország területén haladjon át, jó arányban a segédegnyelítő és az ország „szélei” között.

## 3. fejezet

# A szögtartó gömbvetület vizsgálata

A kettős vetítés nagyon fontos szerepet játszik a magyarországi topográfiai vetületek témakörében. Ennek megfelelően fontos, hogy a kettős vetítés első lépéseként használt szögtartó gömbvetületet alaposan tárgyaljuk. A későbbiekben a sztereografikus vetületnél, a szögtartó hengervetületeknél, illetve az EOV-nál is fel fogom használni az itt leírtakat.

### 3.1. Alapkövetelmények és ezek következményei

A gömbvetületek speciális vetületek, melyeknek alapfelülete mindig egy forgási ellipszoid, képfelülete pedig mindig egy gömb. Ezen kívül még az alábbi megkötések tartoznak a gömbvetületekhez:

- Minden ellipszoidi hosszúsági kör képe gömbi hosszúsági kör.

- Minden ellipszoidi szélességi kör képe gömbi szélességi kör.
- A meridiánok képei a paralelköröket ekvidisztáns módon osztják.

Ennek következményei, hogy a vetületi egyenletek alakja:

$$\varphi(\Phi, \Lambda) = f(\Phi)$$

$$\lambda(\Phi, \Lambda) = g(\Lambda)$$

vagyis  $\varphi$  csak  $\Phi$ -től,  $\lambda$  pedig csak  $\Lambda$ -tól függ. Az egyszerűség kedvéért még érdemes feltenni, hogy

$$\lambda(0) = 0.$$

Ezzel együtt a harmadik feltevés következménye, hogy

$$\lambda(\Lambda) = n \cdot \Lambda.$$

A geodéziai gömbvetületek szinte kivétel nélkül szögtartók, így itt csak ezekre térünk ki. Általában igaz a gömbvetületek paralelkör menti, illetve meridián menti hossztorzulására, hogy:

$$h = \frac{R \cdot \Delta \lambda \cdot \cos \varphi}{u \cdot \Delta \Lambda} = n \frac{R \cos \varphi}{N \cos \Phi}$$

$$k = \frac{R \cdot \Delta \varphi}{M \cdot \Delta \Phi} = \frac{R}{M} \varphi'(\Phi).$$



A szögtartás szükséges és elégséges feltétele, hogy  $h = k$  teljesüljön minden pontban. Ezt felhasználva kapjuk a szélességek közötti összefüggést, vagyis  $\varphi(\Phi)$ -t.

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{M} \varphi'(\Phi) &= n \frac{R \cos \varphi}{N \cos \Phi} \\
 \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} &= n \int \frac{M d\Phi}{N \cos \Phi} \\
 \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) &= n (1 - e^2) \int \frac{d\Phi}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi) \cos \Phi} \\
 \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) &= n \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin \Phi}{1 + e \sin \Phi} \right)^{\frac{5}{2}} \right) + c \\
 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) &= K \operatorname{tg}^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left( \frac{1 - e \sin \Phi}{1 + e \sin \Phi} \right)^{\frac{ne}{2}}
 \end{aligned}$$

A levezetés során felhasználtuk, hogy az ellipszoid meridián menti görbületi sugara ( $M$ ), illetve a harántgörbulete ( $N$ ) az alábbi képletekkel kapható:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{\frac{3}{2}}} \\
 N &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}.
 \end{aligned}$$

Az utolsó sor a  $K = e^e$  helyettesítéssel adódik a megelőzőből.

Így megkaptuk a szélességek közötti összefüggést, melynek két paramétere van:  $n$  és  $K$ . Szokás a gömbvetületeknél egy normálparalelkört ( $\Phi_n$ ) választani, melyre  $h(\Phi_n) = 1$ . Ez a paralelkör torzulásmentesen képződik le a gömbre.

A minimális hossztorzulású, konform gömbvetület paramétereit meghatározza, ha megadjuk az ellipszoidi normálparalelkör szélességét. Ez abból adódik, hogy összesen 5 paraméterünk van:  $R, n, K, \Phi_n$  és  $\varphi_n$ , de ezek között

összefüggések vannak, ha a vetület szögtartó, illetve minimális hossztorzulású<sup>1</sup>.

$R$  a képfelület, az ún. Gauss-gömb sugarát jelöli. Ezek az összefüggések az alábbiak:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi_n &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \Phi_n} \cdot \operatorname{tg} \varphi_n \\ n \sin \varphi_n &= \sin \Phi_n \\ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_n}{2} \right) &= K \operatorname{tg}^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_n}{2} \right) \cdot \left( \frac{1 - e \sin \Phi_n}{1 + e \sin \Phi_n} \right)^{\frac{ne}{2}} \\ R &= \sqrt{M(\Phi_n)N(\Phi_n)} \end{aligned}$$

Ha  $\Phi_n$ -t rögzítjük, akkor a fenti képletek alapján minden hiányzó paraméter értéke meghatározható.

## 3.2. Gömbvetületek optimalizálása

A gömbvetületnek egyetlen paramétere van, ami befolyásolja a maximális hossztorzulást, ez pedig a normálpárelekör.

### 3.2.1. Bessel-ellipszoid

A normálpárelekört a sztereografikus vetület esetében a gömbön választották  $\varphi_n = 46,5^\circ$ -nak, aminek az ellipszoidon  $\Phi_n = 46,5453917638^\circ$  felel meg.

---

<sup>1</sup>A minimális hossztorzulás itt annyit jelent, hogy a lineármodulus sorbafejtett alakjában

$$l = 1 + t_1(\Phi - \Phi_n) + t_2(\Phi - \Phi_n)^2 + t_3(\Phi - \Phi_n)^3 + \dots$$

az első, és a másodfokú tag együtthatója is 0. Ez azt eredményezi, hogy a torzulás 1-től legfeljebb harmadrendben tér el.

Ebben az esetben a maximális hossztorzulás értéke

$$l_{\max} = 1,00000010105.$$

A normálpárelekkört megváltoztatva itt jelentős javulás érhető el, bár ez a javítás még mindig nem fog lényeges szerepet játszani. Az egyváltozós függvény szélsőértékét egyszerű numerikus módszerekkel megállapítva adódik, hogy a jelenlegi országterületre a normálszélesség

$$\Phi_0 = 47,163085993^\circ$$

értéke esetén kapjuk az optimumot. Ekkor maximális hossztorzulás értéke

$$l_{\max} = 1,00000003409$$

-ra csökken. Ebben az esetben a Gauss-gömb sugara:

$$R_{\text{Bessel}} = 6378972,61165869 \text{ m.}$$

### 3.2.2. IUGG'67

Ezt az ellipszoidot az IUGG (International Union of Geodesy and Geophysics) 1967-ben fogadta el.

A normálpárelekkört az EOV esetében az ellipszoidon  $47^\circ 10'$ -nek választották. Ebben az esetben a maximális hossztorzulás értéke

$$l_{\max} = 1,00000003435.$$

A normálpárelekkört megváltoztatva csak minimális javulás érhető el.

$$\Phi_0 = 47,1642913818359^\circ,$$

értéke esetén kapjuk az optimumot. Amint látható  $\Phi_0$  értéke alig tér el az eredetileg választott  $47,16^\circ$ -tól, a maximális hossztorzulás értéke pedig 1,00000003418-ra csökken. Ebben az esetben a Gauss-gömb sugara:

$$R_{\text{JUGG}} = 6379741,2289806 \text{ m.}$$

### 3.2.3. WGS'84

Ezt az ellipszoidot nem szokás kettős vetítés esetén alapfelületként használni. Azonban ez az ellipszoid ma már nagyon széles körben elterjedt, hiszen minden GPS-alapú eszköz, számítás tulajdonképpen ezt használja alapfelületnek. Mivel WGS'84-beli koordináták sokszor állnak rendelkezésünkre, ugyanakkor nem akarunk speciális ellipszoidi vetületekkel számolni, ezért indokoltnak látszik ezen alapfelület esetén is a mai ország területére nézve optimális gömbvetületet megkeresni. Ekkor ugyanis ezt, illetve a kettős vetítés elvét felhasználva, egyszerű gömbi vetületeket is használhatunk.

Ahogy azt az 1.2.2. fejezetben leírtam, egy konverziós programnak köszönhetően az országhatár pontjai, megfelelő pontossággal rendelkezésre állnak a WGS'84-ellipszoidon is. Ezt a ponthalmazt felhasználva kapjuk, hogy az optimális szögtartó gömbvetület normálpáralelköre:

$$\Phi_0 = 47,1640273928642^\circ,$$

amikor is a maximális hossztorzulás:

$$l_{\text{max}} = 1,00000003418.$$

Ebben az esetben a Gauss-gömb sugara:

$$R_{\text{WGS}} = 6379717,97415232 \text{ m.}$$

### 3.2.4. Általános észrevételek

Látható, hogy a Bessel-ellipszoid speciálisan erre a területre lett kialakítva, annak felhasználásával kapjuk a legjobb értéket. Azonban a korszerűség alapján nem ajánlható a Bessel-ellipszoid, hiszen a fontosabb mai rendszerek már az egész Földre optimalizált ellipszoidokon alapulnak. Mind az IUGG'67, mind pedig a WGS'84 ilyen. Az utóbbi torzulási szempontokból jobb tulajdonságokat mutat, így ha nincs semmilyen egyéb körülmény, akkor a fentiek közül ennek használata ajánlatos.

Fontos azonban leszögezni, hogy a gömbvetületek ezen ellipszoidok használata esetén legalább két nagyságrenddel kisebb hossztorzulást okoznak, mint a gömbről síkra képezés során használt vetületek. Vagyis a vetületek jó megválasztása sokkal fontosabb szempont, mint az alapfelületi ellipszoid kiválasztása.

## 4. fejezet

# A sztereografikus rendszer

### 4.1. A sztereografikus rendszer bemutatása

A sztereografikus rendszer is a kettős vetítés elvén alapul. Az alapfelület a Bessel-ellipszoid, erről térnek át gömbvetülettel az ún. régi Gauss-gömbre. Ebben az esetben a Gauss-gömb sugara:

$$R = 6378512,966 \text{ m,}$$

a normálpáralelkört a gömbön határozták meg:

$$\varphi_0 = 46^\circ 30'.$$

Az ehhez tartozó ellipszoidi normálszélesség:

$$\Phi_0 = 46^\circ 32' 43,41035''.$$

Miután a gömbi vetülettel áttértünk az ellipszoidra, következik a sztereografikus projekció. Ennek kezdőpontja, vagyis a vetítési sík érintési pontja

nem a normálparalelkörön van. Kezdőpontnak ugyanis a Gellért-hegy nevű háromszögelési pontot választották, aminek a koordinátáit meghatározták a Bessel-ellipszoidon, illetve a Gauss-gömbön is.

## 4.2. A sztereografikus rendszer vizsgálata

A vizsgálat során a torzulási értékeket nem csak a határpontokban szükséges vizsgálni, hanem az ország belső területén is. Sztereografikus projekció esetén a lineármódulus 1-től való eltérésének izovonalai a Gauss-gömb gömbi kisköreinek képei, mivel a lineármódulus értéke csak a pólustávolságtól függ:

$$l = \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

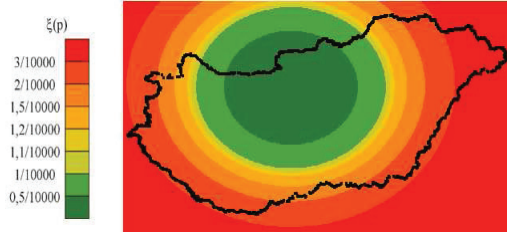
Ennek megfelelően megválaszthatnánk úgy a redukciós konstans és a vetületi kezdőpont koordinátáinak értékét, hogy a lineármódulus 1-től való eltéréseinek maximuma a határpontok halmazán lényegesen kisebb, mintha az ország teljes területét vizsgálnánk.

Az optimalizálást több lépésben végeztem el. Először a gömbvetületek közül kerestem meg a legjobbat (3.2.1. fejezet). Majd ezt a legkedvezőbb gömbvetületet rögzítve kerestem különböző szempontok szerint optimális sztereografikus vetületeket.

Ha  $f_0$ -nak a Budapesti Rendszert tekintjük, akkor az alábbi értéket kapjuk:

$$\xi_{f_0}^* = 0,0005266615.$$

A torzulási viszonyokat a 4.1. ábra mutatja. Az 5/10 000-et meghaladó érték nagyon magas, de ez csalóka, hiszen nem is volt cél a teljes mai ország területén alkalmazni.

4.1. ábra. A  $\xi_{f_0}(p)$  értékei a Budapesti Rendszerben

#### 4.2.1. Redukciós konstans

Az optimalizálás során először nem változtatjuk meg a vetületi kezdőpont helyét, vagyis az a Gellért-hegy háromszögelési pontban van. Ekkor változtatási lehetőségnek csak a redukciós konstans módosítása marad. Ennek megfelelően ez a probléma egy egyváltozós optimalizálást igényel, amit egyszerű numerikus módszerekkel lehet elvégezni. A számítások azt adják, hogy az

$$m = 0,99973614307495$$

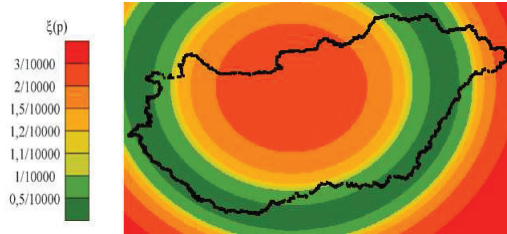
érték esetén kapjuk a legkedvezőbb vetületet ( $f_1$ ). Ekkor a lineármódulus 1-től való eltérésének a maximuma:

$$\xi_{f_1}^* = 0,0002638116.$$

Ez megfelel az elvárásainknak, hiszen az  $m = 1$  redukciós konstans esetéhez képest várhatóan nagyjából a felére lehet csökkenteni a vizsgált értéket, hisz az  $m = 1$  esetben csak 1-nél nagyobb hossztorzulás értékek lépnek fel, ha viszont a konstans értékét kedvezőre állítjuk, akkor a fellépő torzulások egy



1-re szimmetrikus intervallumba szoríthatók. Mivel a redukciós konstans csak egy hasonlóságot jelent, így nagyjából felére csökken  $\xi^*$  értéke. Ezt minimálisan befolyásolja az is, hogy közben a gömbvetületet is optimalizáltuk, ám ennek hatása igen csekély. A kapott vetület hossztorzulási viszonyait a 4.2. ábra mutatja.



4.2. ábra. A  $\xi_{f_1}(p)$  értékei

#### 4.2.2. Kezdőpont a gellérthegyi meridiánon

A gellérthegyi meridián központi szerepet tölt be a sztereografikus vetületben, ezért érdemes megvizsgálni azt az esetet, amikor elmozgatjuk ugyan a vetületi kezdőpontot, de csak a gellérthegyi meridiánon. Így eggyel nő a paraméterek száma, a redukciós konstans mellett a kezdőpont szélessége lesz a másik.

A kétparaméteres optimalizálás végeredménye a következő:

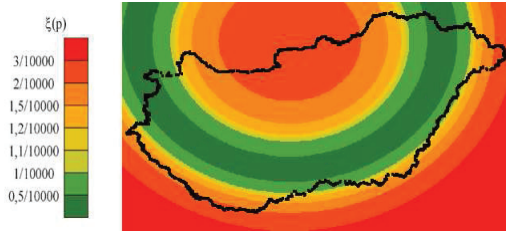
$$m = 0,99974517030771 \quad (4.2.1)$$

$$\varphi_0 = 48,11737377316864^\circ \quad (4.2.2)$$

esetben kapjuk  $\xi^*$ -ra nézve a legkedvezőbb vetületet ( $f_2$ ). A kapott érték:

$$\xi_{f_2}^* = 0,0002542485.$$

A vetület kezdőpontját jobban megvizsgálva, meglepő az eredmény. Itt ugyanis az adja az optimális megoldást, ha az ország területéről kivisszük a vetületi kezdőpontot. Ennek az az oka, hogy a gellérthegyi meridiántól az ország északkeleti határa esik a legmesszebb, és a távoli pontoknak megfelelő szélességen lévő pontok a gellérthegyi meridiánon már a mai országhatáron kívülre esnek. Az  $f_2$  vetület hossztorzulási viszonyait a 4.3. ábra mutatja.



4.3. ábra. A  $\xi_{f_2}(p)$  értékei

#### 4.2.3. Teljes optimalizálás

A legkedvezőbb vetületet természetesen úgy kaphatjuk, ha minden szóba kerülő paraméternek a legjobb értéket választjuk. Vagyis ebben a fejezetben nem tesszük azt a megszorítást, hogy a kezdőpont a gellérthegyi meridiánon van, hanem bárhol lehet.

Az optimalizálás ebben az esetben egy 3 változós függvény minimumát adja meg. A három változó:

- a redukciós konstans
- a vetületi kezdőpont szélessége
- a vetületi kezdőpont hosszúsága.

Az optimalizálás eredménye a következő:

$$m = 0,99978681311325 \quad (4.2.3)$$

$$\varphi_0 = 47,44688959^\circ \quad (4.2.4)$$

$$\lambda_0 = 0,41979448^\circ \quad (4.2.5)$$

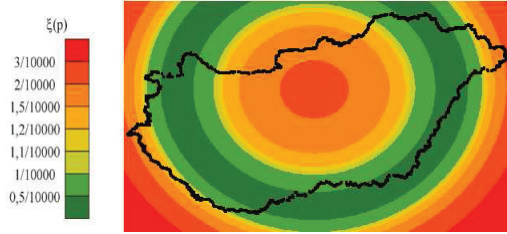
ahol  $\lambda_0$  értékét a gellérthegyi meridiánhoz viszonyítva kell érteni. Az így kapott  $f_3$  vetület kezdőpontjának szélessége majdnem megegyezik a Gellért-hegy háromszögelési pont szélességével. A jelentős eltérést a redukciós konstanstól az okozza, hogy a kezdőpont elmozdul keleti irányban.

A kapott vetület esetében a lineármódulus 1-től való eltérésének a maximuma:

$$\xi_{f_3}^* = 0,0002131722.$$

Ez meglehetősen kedvezőnek mondható, hisz a jelenleg is széles körben elterjedt EOVS esetén ez az érték nagyobb.

A hossztorzulási viszonyokat a 4.4. ábra mutatja.



4.4. ábra. A  $\xi_{f_3}(p)$  értékei az általános esetben

#### 4.2.4. A gömbi lehetőségek összefoglalása

A fenti lépések jól mutatják, hogy a redukciós konstans alkalmazásával már nagyon komoly előrelépést lehet elérni. Ezzel lényegében felére csökkenthetjük a számunkra fontos torzulási mutató értékét.

A vetületi kezdőpont gellérthegyi meridiánon való mozgatása lényegében nem hoz eredményt, alig csökken a torzulások értéke. Ebben az esetben inkább az az érdekes, hogy nem az ország középpontja felé érdemes mozgatni a kezdőpontot, hanem észak felé.

A tetszőleges vetületi kezdőpont esete azzal az elméleti jelentőséggel bír, hogy az így kapott vetület már az általam vizsgált torzulási mutató ( $\xi^*$ ) tekintetében kedvezőbb, mint az EO.V.

Érdemes még megemlíteni, hogy ha a vetületi kezdőpont a gellérthegyi meridiánon marad, akkor az úgy helyezkedik el, hogy a torzulási viszonyok közelítenek egy kúpvetület megfelelő struktúrájához. Vagyis a vetületi kezdőpont nem az ország közepére kerül, hanem jóval kívül esik azon, amivel a  $\xi$ -izovonalak csak egy félkör mentén érintik az ország területét.

### 4.3. Ellipszoidi sztereografikus projekció

Felmerül az a lehetőség is, hogy az ellipszoidi sztereografikus vetületet használjuk topográfiai vetületként, hiszen ez is szögártó. Ekkor nincs szükség kettős vetítésre, de a vetületi egyenletek tulajdonképpen tartalmazzák ezt a motívumot. [Bugayevskiy, Snyder, 1995] alapján a síkkordináták az alábbi képletekkel számíthatók:

$$x = A(\Phi, \Lambda) \cos \chi \sin(\Lambda - \Lambda_0)$$

$$y = A(\Phi, \Lambda) (\cos \chi_0 \sin \chi - \sin \chi_0 \cos \chi \cos(\Lambda - \Lambda_0))$$

ahol

$$\begin{aligned} A(\Phi, \Lambda) &= \frac{2amM(\Phi_0)}{\cos \chi_0 (1 + \sin \chi_0 \sin \chi + \cos \chi_0 \cos \chi \cos(\Lambda - \Lambda_0))} \\ \chi(\Phi) &= 2 \arctg \left( \tg \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin \Phi}{1 + e \sin \Phi} \right)^{\frac{e}{2}} \right) - \frac{\pi}{2} \\ M(\Phi) &= \frac{\cos \Phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}} \end{aligned}$$

és  $a$  az ellipszoid nagytengelyének fele,  $e$  az ellipszoid első excentricitása,  $m$  pedig a redukciós konstans.  $\Phi_0$  és  $\Lambda_0$  a vetületi kezdőpont ellipszoidi koordinátái, illetve  $\chi_0 = M(\Phi_0)$ .

A vetületet rendszerint  $m = 1$  redukciós konstanssal alkalmazzák, amit nevezzünk „érintő” elhelyezésnek. Érdekes azonban gondolni a „metsző” sztereografikus projekcióra is, vagyis hogy az  $m$  konstans értékét 1-től különbözőnek is választhatjuk. Ennek következtében a hossztorzulási értékek lehetnek 1-nél kisebbek is, így mindenképpen kedvezőbb vetületet kaphatunk a hossztorzulás 1-től való eltéréseinek maximumát illetően. A fenti jelöléseket

felhasználva a lineármódulus értéke:

$$l(\Phi, \Lambda) = \frac{A(\Phi, \Lambda) \cos \chi}{aM(\Phi)}$$

Minimális mértékben módosítja az optimalizálás végeredményét, hogy a határpontok koordinátáit melyik alapfelületen tekintjük. Mivel ez a vetület sosem volt a magyarországi topográfiában használatban, így a hagyományok nem tüntetik ki egyik alapfelületet sem. Mivel azonban a sztereografikus projekciót Bessel-ellipszoid alapfelülettel alkalmazták, így ennek a vetületnek a torzulási viszonyait is Bessel-ellipszoidot alapfelületnek véve számítottam ki.

#### 4.3.1. „Érintő” elhelyezés

Az optimalizálás paraméterei ebben az esetben a vetületi kezdőpont koordinátái. A kétváltozós függvény minimumhelyére az alábbi értékek adódnak:

$$\Phi_0 = 47,8917608961^\circ$$

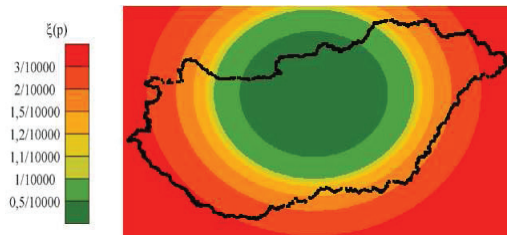
$$\Lambda_0 = 0,4121736307^\circ$$

( $\Lambda_0$  értékét a Gellért-hegy háromszögelési pont Bessel-ellipszoidi meridiánjához képest kell érteni.)

Ebben az esetben a kapott vetületi egyenletekhez ( $g_1$ ) tartozó torzulási mutató értéke:

$$\xi_{g_1}^* = 0,0004141809.$$

Ez az érték túl nagy ahhoz, hogy felmerüljön a vetület alkalmazása az egész ország területére. A torzulási viszonyokat a 4.5. ábra mutatja.

4.5. ábra. A  $\xi_{g_1}(p)$  értékei

Viszont nem annyira rossz ez az érték, hogy a redukciós konstans megfelelő megválasztásával ne lehetne  $\xi^*$  értékét  $2/10\,000$  közelébe hozni.

#### 4.3.2. Redukciós konstans

Már a gömbi sztereografikus vetületnél is azt tapasztaltuk, hogy legkomolyabb mértékben a redukciós konstans bevezetésével tudunk csökkenteni a torzulásokon. Ennek megfelelően az ellipszoidi változatnál is ezt várjuk. Most tehát a vetületi kezdőpont két koordinátája kiegészül a redukciós konstans értékével, ami az optimalizálás paramétereit illeti. A függvény a minimumát az alábbi pontban veszi fel:

$$m = 0,99979827079739$$

$$\Phi_0 = 47,8201298022^\circ$$

$$\Lambda_0 = 0,4396938400^\circ$$

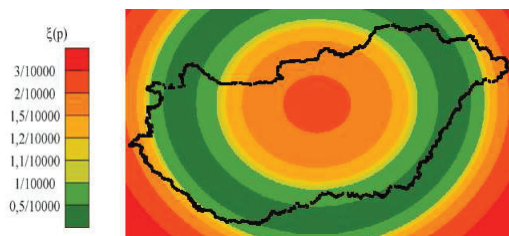
( $\Lambda_0$  értékét a Gellért-hegy háromszögelési pont Bessel-ellipszoidi meridiánjához képest kell érteni.)

Az így kapott vetületet  $g_2$ -vel jelölve kapjuk, hogy

$$\xi_{g_2}^* = 0,0002127864.$$

A sztereografikus vetület egyszerűségét figyelembe véve ez kifejezetten kedvező értéknek tekinthető.

A torzulási viszonyokat a 4.6. ábra mutatja.



4.6. ábra. A  $\xi_{g_2}(p)$  értékei

Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy az optimális gömbi sztereografikus vetület (első lépésben egy gömbvetületet alkalmazva) és az ellipszoidi sztereografikus vetület között nagyon csekély a különbség. Ez a különbség a számolási pontosságból adódó hibahatáron belül van.

Ha a két vetület hossztorzulási viszonyait nézzük mindössze, akkor lényegében nem fedezhető fel különbség közöttük.



## 5. fejezet

# Lambert-féle szögtartó kúpvetület

A Lambert-féle szögtartó hengervetület 1772 óta ismert, Lambert, francia geodéta írta le először [Lambert, 1772]. Szögtartó volta miatt természetesen felmerül a topográfiai alkalmazása. A vetület használata a korszerű topográfiában többféleképpen is elképzelhető.

Lambert természetesen gömbi alapfelület esetére írta le a vetületet. Ha ezt a verziót kívánjuk használni, akkor az ellipszoid alapfelületről át kell térnünk a gömbre, vagyis szükségünk lesz ismét a kettős vetítésre, és első lépésként egy szögtartó gömbvetületre. Az alapfelületről függően érdemes optimalizálni a gömbvetületet, majd pedig a kúpvetületet. Ha kedvező torzulási viszonyokat szeretnénk, akkor mindenképpen „metsző”, vagyis süllyesztett elhelyezést kell alkalmaznunk. Ekkor normális elhelyezés mellett két paramétere van az optimalizálásnak, mégpedig a két normálparalelkör értéke. Megvizsgálom az érintő elhelyezést is, amikor csak az egyetlen normálparalelkör optimalizálására van szükség, abból a célból, hogy jól látható legyen, hogy ennek az alkalmazása nehezen indokolható.

Ferdetengelyű elhelyezést is alkalmazhatunk, bár ebben az esetben a vetületi egyenletek lényegesen bonyolultabbak. Mivel azonban a szükséges számításokat manapság már számítógépek végzik, így ez nem jelent komoly különbséget. Ferdetengelyű elhelyezés esetén az optimalizálás 4-változóssá válik, hiszen a két normálparalelkör mellett a segéd földrajzi fókuszpontja is paraméter lesz, ami két gömbi koordinátát jelent.

Ennek a vetületnek azonban van ellipszoidi változata is, ami nem igényli egy közbülső lépés (gömbvetület) beiktatását. Ezt használva az optimalizálási folyamat teljesen ugyanaz, mint a gömbi esetben, leszámítva, hogy gömbvetület optimalizálására nincs szükség.

A Magyarországon alkalmazott vetületek között nem található meg egyik megoldás sem, de több helyen is alkalmazzák hasonló célokra. Az 1:1 000 000 méretarányú világtérképmű vetületének is ezt választották a módosított polikónikus vetületet lecserélve. Ennek megfelelően indokolt megvizsgálni, hogy optimális esetben ennek a vetületnek milyen hossztorzulási tulajdonságai vannak. Itt is megvizsgálom az érintő, illetve a metsző elhelyezést is.

## 5.1. Kettős vetítés

A vetítés első lépéseként egy gömbvetületet alkalmazunk, aminek a vetületi egyenleteit a 3. fejezet tárgyalja.

Ezt követően egy Lambert-féle gömbi kúpvetülettel térünk át a gömbről a síkra, ennek vetületei egyenletei  $(\beta_1, \beta_2)$  a hossztorzulásmentes paralelkörök

pólustávolságai):

$$\begin{aligned}\rho(\beta) &= C \operatorname{tg}^n \left( \frac{\beta}{2} \right) \\ \bar{\lambda}(\lambda) &= n\lambda,\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}n &= \cos \beta_0 \\ C &= \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\operatorname{tg}^n \frac{\beta_0}{2}}.\end{aligned}$$

A vizsgálat során tanulmányozom azt az esetet is, amikor „érintő” a kúpvetület, vagyis mindössze egyetlen hossztorzulásmentes paralelkör van. Ekkor az  $n$  és  $C$  értékei kicsit módosulnak, mégpedig a következőképpen ( $\beta_0$  az egyetlen hossztorzulásmentes paralelkör pólustávolsága):

$$\begin{aligned}n &= \frac{\ln \sin \beta_1 - \ln \sin \beta_2}{\ln \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2}} \\ C &= \frac{\sin \beta_1}{n \operatorname{tg}^n \frac{\beta_1}{2}}.\end{aligned}$$

Számomra a legfontosabb az optimalizálás során a lineármódulus értéke, ami ennél a vetületnél csak a szélesség (vagy a pólustávolság) függvénye:

$$l(\beta) = \frac{n\rho(\beta)}{\sin \beta}.$$

Ez az egyenlet mindkét fenti esetben érvényes.

Megvizsgálom a vetületet a ferdetengelyű elhelyezés esetén is, ekkor a fenti képletek természetesen a segédföldrajzi koordinátákra értendők.

### 5.1.1. „Érintő” elhelyezés

Ebben az esetben mindössze az egyetlen torzulásmentes paralelkör jelenti az optimalizálás paraméterét. IUGG'67-ellipszoid alapfelület esetén jelöljük az

optimális vetületet  $h_1$ -gyel, ekkor

$$\varphi_0 = 47,1234400128$$

a legjobb választás. Ebben az esetben

$$\xi_{h_1}^* = 0,0003080577,$$

míg WGS'84-ellipszoid esetén (amit  $h_2$ -vel jelölünk):

$$\varphi_0 = 47,1231788506$$

helyen van az optimum, ekkor

$$\xi_{h_2}^* = 0,0003080186.$$

A torzulási viszonyokat WGS'84 alapfelület esetén az 5.1. ábra mutatja.



5.1. ábra. Legkedvezőbb érintő, szögtartó kúpvetület ( $h_2$ )

### 5.1.2. „Metsző” elhelyezés

Az optimalizálás paramétereit most a hossztorzulásmentes paralelkörök szélességei adják. Ebben az esetben két ilyen van:  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$ . Ekkor a legkedvezőbb

torzulási viszonyokat IUGG'67 alapfelület esetén ( $h_3$ )

$$\varphi_1 = 48,1258142184^\circ$$

$$\varphi_2 = 46,1147195559^\circ$$

értékek adják. Ebben az esetben

$$\xi_{h_3}^* = 0,0001540054.$$

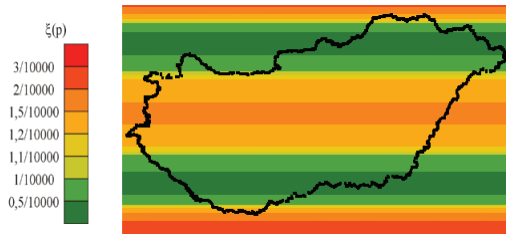
A megfelelő értékek WGS'84 alapfelület esetén ( $h_4$ ):

$$\varphi_1 = 48,1254961348^\circ$$

$$\varphi_2 = 46,1145287059^\circ$$

$$\xi_{h_4}^* = 0,0001539859.$$

A torzulási viszonyokat WGS'84 alapfelület esetén az 5.2. ábra mutatja.

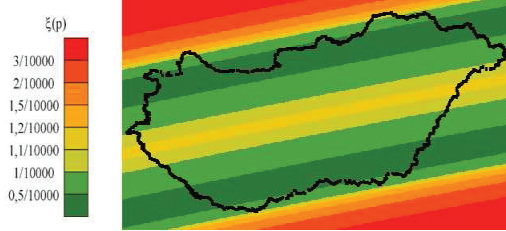


5.2. ábra. Legkedvezőbb metsző, szögtartó kúpvetület ( $h_4$ )

### 5.1.3. Ferdetengelyű elhelyezés

A Lambert-féle szögtartó kúpvetületet ritkán alkalmazzák ferdetengelyű elhelyezéssel. Csehszlovákiában használták topográfiai célokra a Křovák-vetületet

[Kuska, 1960], melynél Bessel-ellipszoidról tértek át szögtartó gömbvetülettel egy gömbre, majd a gömbről egy ferdetengelyű, szögtartó hengervetülettel képezték a síkba.



5.3. ábra. Legkedvezőbb ferdetengelyű, szögtartó kúpvetület ( $h_5$ )

Megvizsgáltam, hogy a Křovák-vetület ötletét felhasználva, hogyan kaphatjuk a legkedvezőbb vetületet Magyarországra. Ebben az esetben két új paraméterrel bővül a változtatható értékek listája, nevezetesen a segéd földrajzi koordináta-rendszer kezdőpontjának két koordinátájával ( $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\lambda}$ ). Így az optimalizálás is ennek megfelelően változik. Az optimalizálás eredménye ( $h_5$ ) a következő (WGS'84):

$$\bar{\varphi} = 13,2672445780^\circ$$

$$\bar{\lambda} = 69,7037780769^\circ$$

$$\varphi_1 = 36,9522230390^\circ$$

$$\varphi_2 = 38,6591238311^\circ,$$

ahol  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\lambda}$  pont jelenti a gömb felületén a segéd földrajzi fókuszpont kezdőpontját (nem a segédpólusát),  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  pedig a torzulásmentes paralelköröket.

Ekkor a lineármódulus 1-től való eltérésének maximuma:

$$\xi_{n_5}^* = 0,0001109383.$$

A torzulási viszonyokat az 5.3. ábra mutatja.

## 5.2. Ellipszoidi kúpvetület

A kettős vetítést ki lehet küszöbölni, és az ellipszoidról azonnal lehet szögtartó módon áttérni a síkra kúpvetülettel [Varga, 1983]. Ezt a lehetőséget tárgyalja ez a fejezet.

Ebben az esetben csak a normális elhelyezést vizsgálom meg, hiszen az ellipszoidi vetületknél a ferdetengelyű elhelyezés lényegesen komplikáltabbá teszi a számításokat, mint a gömbi vetületek esetén. Eszerint csak az „érintő”, illetve a „metsző” elhelyezést tárgyalom itt. Előbbi esetben egyetlen torzulásmentes paralelkör van ( $\Phi_1 = \Phi_2$ ), míg a másodiknál kettő ( $\Phi_1, \Phi_2$ ).

Az ellipszoidi szögtartó kúpvetület sugárfüggvénye az alábbi:

$$\rho(\Phi) = d \operatorname{tg}^n \frac{\frac{\pi}{2} - \Phi}{2} \left( \frac{1 + e \sin \Phi}{1 - e \sin \Phi} \right)^{\frac{n e}{2}}$$

ahol

$$n = \frac{\ln \cos \Phi_1 - \ln \cos \Phi_2 + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 - e^2 \sin^2 \Phi_2}{1 - e^2 \sin^2 \Phi_1} \right)}{\ln \operatorname{tg} \frac{\frac{\pi}{2} - \Phi_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\frac{\pi}{2} - \Phi_2}{2} + \frac{e}{2} \ln \left( \frac{1 + e \sin \Phi_1}{1 - e \sin \Phi_1} \right) \frac{1 + e \sin \Phi_2}{1 - e \sin \Phi_2}}$$

$$d = \frac{\frac{a \cos \Phi_1}{n \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi_1}}}{\operatorname{tg}^n \frac{\frac{\pi}{2} - \Phi_1}{2} \left( \frac{1 + e \sin \Phi_1}{1 - e \sin \Phi_1} \right)^{\frac{n e}{2}}}$$

ahol  $\Phi_1$  és  $\Phi_2$  a torzulásmentes paralelkörök ellipszoidi szélessége.

Érintő elhelyezés esetén a fenti képlet  $d$ -re nem érvényes (0 lenne a nevezőben  $\Phi_1 = \Phi_2$  esetén), ekkor az alábbi egyenlőség igaz:

$$d = \sin \Phi_0.$$

A fenti értékeket felhasználva már a lineármódulus értékét is ki tudjuk számítani:

$$l(\Phi) = \frac{\rho(\Phi)n\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}{a \cos \Phi}$$

Mivel ennek a vetületnek nincs hazai hagyománya a topográfiai vetületek körében, így az alapfelület nem rögzített. Az optimalizálás ténye korszerű ellipszoidok alkalmazását kívánja. Ennél a vetületnél két alapfelületre végeztem el a számításokat, az IUGG'67-es ellipszoidra (3.2.2. fejezet) és a WGS'84-es ellipszoidra (3.2.3. fejezet).

### 5.2.1. „Érintő” elhelyezés

Ebben az esetben, ahogy a kettős vetítésnél is, az egyetlen torzulásmentes paralelkör szélessége jelenti az optimalizálás paraméterét. A két alapfelület esetén az eredmények a következők:

#### IUGG'67

Jelöljük az optimális vetületet  $h_6$ -tal, ekkor

$$\Phi_0 = 47,1678783132^\circ$$

és

$$\xi_{h_6}^* = 0,0003080577.$$



**WGS'84**

Legyen az optimális vetület  $h_7$ , ekkor

$$\Phi_0 = 47,1676160014^\circ$$

és

$$\xi_{h_7}^* = 0,0003080186.$$

**5.2.2. „Metsző” elhelyezés**

A „metsző” elhelyezés azt jelenti, hogy két torzulásmentes paralelkört választunk. Ettől kedvezőbb torzulási viszonyokat várhatunk, mivel az „érintő” esetben csak hossznagyobbodások lépnek fel, míg a „metsző” elhelyezés esetén a két normálpáralel kör között hosszcsökkenést tapasztalunk.

Az ily módon kétváltozós függvény minimumhelyei alapfelülettől függően a következők:

**IUGG'67**

Jelöljük a legjobb vetületet  $h_8$ -cal, ekkor

$$\Phi_1 = 48,1717678555^\circ$$

$$\Phi_2 = 46,1575442222^\circ.$$

Ebben az esetben a számunkra fontos érték:

$$\xi_{h_8}^* = 0,0001540052.$$

**WGS'84**

Legyen az optimális vetület  $h_9$ , ekkor

$$\Phi_1 = 48,1714416115^\circ$$

$$\Phi_2 = 46,1573460632^\circ.$$

Ebben az esetben  $\xi^*$  értéke:

$$\xi_{h_9}^* = 0,0001539856.$$

**5.3. Konklúzió**

Az előzetes várakozásoknak megfelelően bebizonyosodott, hogy az „érintő” elhelyezés nem szolgáltat jó eredményt. Az elfogadható eredményhez mindenképpen „metsző” kúpvetület használata szükséges. Az is jól látható a vizsgálatokból, hogy a két kiválasztott ellipszoid között nincs érdemi különbség, vagyis esetleges használat esetén nem a torzulási viszonyok fogják eldönteni, hogy melyiket érdemes alapfelületnek választani. Az sem hoz érdemi különbséget, hogy a kettős vetítést választjuk az adott alapfelület esetén legkedvezőbb gömbvetülettel, vagy közvetlenül képezzünk az ellipszoidról a síkba.

Ami remélhető volt, de a vizsgálat bizonyította is, hogy a ferdetengelyű elhelyezésnek megvan a létjogosultsága, hiszen nem elhanyagolható mértékben javítja  $\xi^*$  értékét, szögtartó kúpvetülettel ily módon érhető el a legjobb eredmény.

## 6. fejezet

# Egységes Országos Vetületi Rendszer

### 6.1. Az EOV bemutatása

Az Egységes Országos Vetületi Rendszer ellipszoid alapfelületről képezi le a Föld pontjait a síkba. Ez két lépésben történik. Első lépésként az ellipszoidról a pontot egy gömbfelületre transzformáljuk egy *gömbvetület* segítségével, második lépésként pedig a gömbi pontot vetítjük a síkba egy *hengervetület* által.

#### 6.1.1. Az alapfelület

Az EOV alapfelülete az IUGG'67-es forgási ellipszoid. Az alapfelület adatai a 3.2.2. fejezetben megtalálhatók.

### 6.1.2. A gömbvetület

A vetület első lépéseként az IUGG'67 ellipszoidról gömbre térünk át szögtartó módon (ld. a 3. fejezet).

Az EOVS esetén az ellipszoidi normálszélesség megválasztása:

$$\Phi_n = 47^\circ 10' = 47,16^\circ.$$

Ennek következtében a többi paraméter értéke:

$$\varphi_n = 47^\circ 7' 20,0578'' = 47,122238277^\circ$$

$$n = 1,0007197049$$

$$K = 1,0031100083$$

$$R = 6379743,001 \text{ m}$$

### 6.1.3. A hengervetület

A vetület második lépéseként a gömbről egy ferdetengelyű, süllyesztett, szögtartó hengervetülettel térünk át a síkra. A süllyesztés mértéke a redukciós konstanson múlik, mely az EOVS esetén

$$m = 0,99993.$$

Ezen kívül a vetület pontos megadásához a segédpólus koordinátáira van még szükség. Ehelyett inkább a vetületi kezdőpontot szokták megadni. Ez az EOVS esetében:

$$\varphi_0 = 47^\circ 6' = 47,1^\circ$$

$$\lambda_0 = 0^\circ$$

Az, hogy az ellipszoidi normálszélesség nem egyezik meg a gömbi normálszélességgel, problémát okoz a térinformatikában. Ugyanis a legtöbb térinformatikai szoftver csak olyan paraméterezhető vetületeket támogat, amelyekről feltételezi, hogy ez a két érték egybeesik. Ezért merül fel, hogy ezeknél a szoftvereknél az EOV-t egy megfelelően paraméterezett Hotine-féle vetülettel helyettesítsük. [Molnár, Timár, 2002]

A gömbön a gellérthegyi meridiánt tekintjük kezdőmeridiánnak. Ennek a pontnak az ellipszoidi koordinátái:

$$\Phi_0 = 47^\circ 8' 39,8174'' = 47,144393722^\circ$$

$$\Lambda_0 = 19^\circ 2' 54,8584'' = 19,048571777^\circ$$

Ezen adatok megléte után már csak alkalmazni kell a jól ismert szög tartó hengervetületet, melynek vetületi egyenletei:

$$\begin{aligned} x &= Rm \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \\ y &= Rm \lambda' \end{aligned}$$

ahol  $\varphi'$ , illetve  $\lambda'$  a segédföldrajzi koordinátái a megfelelő pontoknak. Ezeket a

$$\begin{aligned} \sin \varphi' &= \cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda \\ \sin \lambda' &= \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\cos \varphi'} \end{aligned}$$

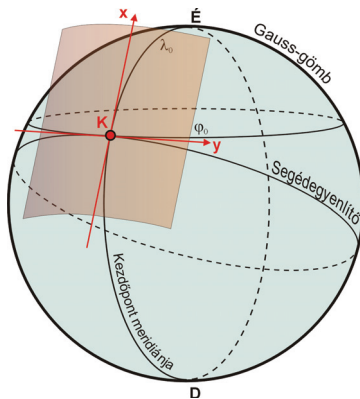
képletekkel lehet kiszámítani.

## 6.2. Az EOv vizsgálatá

### 6.2.1. Bevezetés

Vannak a vetületnek olyan paraméterei, amelyek módosíthatók anélkül, hogy a vetület alapvető tulajdonságai megváltoznának. Az EOv esetén ezeket a paramétereket rögzítették konkrét értékekkel.

A gömbvetület esetén egyetlen paraméter van, a normálszélesség. Ennek optimalizálása megtörtént a 3.2.2. fejezetben. A további számítások során ezt a normálszélességet használom.



6.1. ábra. A vetületi kezdőpont valódi hengervetületeknél

A hengervetület esetén 3 paraméterről beszélhetünk. Az egyik az  $m$ -mel jelölt vetületi méretarány-tényező, amit 1-nél kisebbnek választva az „érintő” elhelyezésű hengervetületből „metsző” elhelyezésű lesz. A másik két paraméter a segédegyenlítő és a segéd-kezdőmeridián (ami egyben egy valódi

meridián is) térképi metszéspontjában elhelyezkedő vetületi kezdőpont (ld. 6.1. ábra) két földrajzi (gömbi) koordinátája ( $\varphi_0$  a szélessége,  $\lambda_0$  a hosszúsága) [Györfy].

Az EOVS esetén  $\xi^*$  értéke kicsit nagyobb, mint 2,5/10 000. Az ország északkeleti határszakaszán található a vetületnek az a pontja, ahol a lineár-modulus értéke felveszi a maximumát (ld. 6.2. ábra).

### 6.2.2. A hengervetület paramétereinek optimalizálása

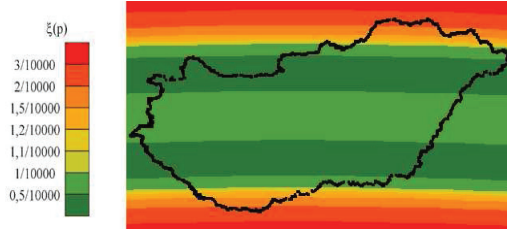
Mivel a gömbvetület optimalizálása nem javít érdemben a hossztorzulási viszonyokon, így lényeges javulást csak a hengervetület paramétereinek optimális megválasztásától várhatunk.

A hengervetület bevezetőben tárgyalt három paraméterét eredetileg a következő módon választották meg:  $m = 0,9993$ ,  $\varphi_0 = 47,1^\circ$ , illetve  $\lambda_0 = 0^\circ$ . Ezek mellett a paraméterek mellett a maximális hossztorzulás értéke:

$$l_{\max} = 1,00025620752.$$

Egy negyedik, módosítható paraméternek tekinthetnénk a kezdőmeridián azimutját, vagyis hogy a kezdőmeridiánt elforgatjuk a jelenlegi északi irányhoz képest, így nem tartjuk be azt a konvenciót, hogy a segéd-kezdőmeridián áthalad az Északi-sarkon. Ekkor tehát ez a segédmeridián nem lenne valódi meridián.

Érdemes azonban észrevenni, hogy ez nem eredményez új szabadsági fokot. Ha ugyanis adott egy tetszőleges vetületi kezdőpont és egy azimut, amivel a segéd-kezdőmeridián eltér az északi iránytól, akkor ehhez létezik



6.2. ábra. Az EOVS hossztorzulási viszonyai

olyan vetületi kezdőpont Északi-sarkon áthaladó kezdőmeridiánnal, aminek esetén a szokásos segédegnyelítő épp az előző konstrukcióban létrejövő segédegnyelítővel esik egybe. Márpedig a segédegnyelítők egybeesése esetén a torzulási viszonyok megegyeznek. Ennek oka, hogy a hengervetület lineármódulusa csak a segédszélességtől függ (arányos  $\frac{1}{\cos \varphi}$ -vel). Ezek alapján a feladat arra a kérdésre egyszerűsödik, hogy hogyan kell megválasztani a redukciós tényezőt és a vetületi kezdőpont koordinátáinak értékét, hogy  $\xi^*$  minimális legyen.

### A vizsgálat eredménye

A háromváltozós függvény szélsőértékének meghatározása tehát a feladat. A legkedvezőbb hossztorzulást akkor kapjuk, ha

$$m = 0,9998886587,$$

$$\varphi_0 = 48,4205621109^\circ,$$

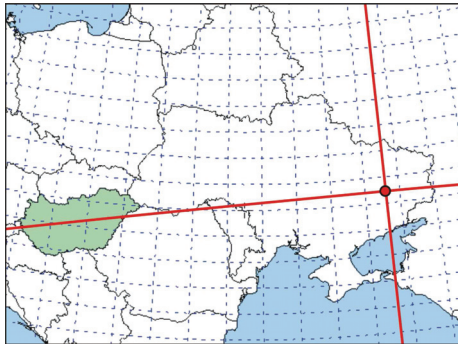
$$\lambda_0 = 17,7071567991^\circ.$$



Ezt a  $\lambda_0$ -t persze úgy kell érteni, hogy az eredeti (gellérthegyi) kezdőmeridiánhoz képest ennyivel kell keleti irányban elmozgatni a kezdőpontot. Ebben az esetben a hossztorzulás értékének 1-től való maximális eltérése:

$$\xi_{f_0}^* = 0,0001113391.$$

Az így kapott kezdőpont Kelet-Ukrajnában található (ld. 6.3. ábra).



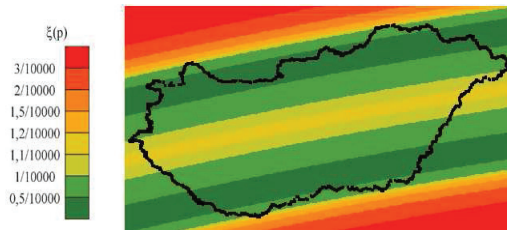
6.3. ábra. Az új vetületi kezdőpont és a segédegvenlítő elhelyezkedése

Ez tehát azt jelenti, hogy a redukált, ferdetengelyű, szögtartó hengervetületben az eredetileg több mint 2,5/10 000-es értéket egészen 1,12/10 000 alá lehet csökkenteni úgy, hogy a vetület alapvető jellegét és az alapfelületet nem változtatjuk meg.

### A kapott vetület elemzése

Érdemes megvizsgálni a kapott vetületet. Ha csak azt vesszük figyelembe, hogy  $\xi^*$  értéke minimális legyen, akkor kétségkívül ez a legkedvezőbb megol-

dás. Azonban látva a kapott vetület torzulási viszonyait (6.4. ábra) felmerülhetnek egyéb szempontok is. Ez a vetület ugyanis az ország területének középső sávjában nem teljesíti az  $1/10\,000$ -es feltételt, míg az EOV ezt teljesítette. Sőt az izovonalas térképeken az is látszik, hogy az új vetület esetén kisebb területen marad  $\xi$  értéke  $1/10\,000$  alatt, mint az EOV esetében.



6.4. ábra. A  $\xi_{f_0}(p)$  értékei az optimális vetület esetén

Ezeknek az észrevételeknek megfelelően négy további esetet vizsgálunk meg. Az egyik az az egyszerű eset, amikor a vetületi kezdőpontot nem változtatjuk. A másodikban a vetületi méretarány-tényezőt 1-nek választjuk. Ekkor a segédegnyelítőtől távolodva egyre nőnek a hengervetület hossztorzulási értékei. (Ezt minimálisan módosítja a gömbvetület által hozzáadott torzulás.) A harmadik esetben az optimum keresésénél azt tűzzük ki célul, hogy az ország „belső” területén a vetület mindenképpen feleljen meg az  $1/10\,000$ -es követelménynek. A negyedik esetben pedig egy olyan vetületet próbálunk találni, ami nem annyira kedvező a  $\xi^*$  értékét tekintve, viszont az ország területének jelentős részén a hossztorzulás nemhogy  $1/10\,000$  alatt van, hanem a  $0,5/10\,000$ -et sem haladja meg.

### Ha a kezdőpontot nem módosítjuk

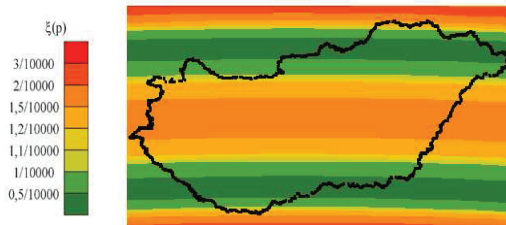
Természetes kérdésként merül fel, hogy mi  $\xi^*$  legkedvezőbb értéke abban az esetben, ha a vetületi kezdőpontot nem módosítjuk. Ekkor csak a vetületi méretarány-tényező marad paraméterként, vagyis ismét egy egyváltozós szélsőérték problémához jutunk. Ezt numerikus módszerekkel megoldva kapjuk, hogy

$$m = 0,9998369138$$

esetén lesz optimális  $\xi^*$  értéke és ekkor

$$\xi_{f_1}^* = 0,0001630874.$$

Ami azt jelenti, hogy már a vetületi méretarány-tényező optimalizálásával jelentős javulást lehet elérni. A pontos hossztorzulási viszonyokat a 6.5. ábra mutatja.



6.5. ábra. A  $\xi_{f_1}(p)$  értékei, ha a kezdőpontot nem módosítjuk

### Ha a vetületi méretarány-tényező 1

A második esetben tehát rögzítsük az  $m = 1$  értéket. Ez azért érdekes, mert ekkor a „vetítés” második lépésében a jól ismert Mercator-vetület ferdetengelyű változata kerül alkalmazásra.

Ekkor tehát mindössze a kezdőpont koordinátáit kell optimálisan megválasztani. Ezt az alábbi paraméterekkel érhetjük el:

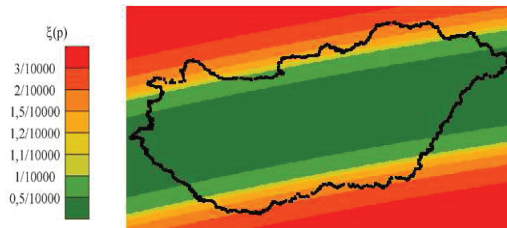
$$\varphi_0 = 48,4192503398^\circ,$$

$$\lambda_0 = 17,6994454187^\circ.$$

Ekkor

$$\xi_{f_2}^* = 0,0002226999.$$

Ebből látható, hogy ennek a verziónak mindösszesen annyi az előnye, hogy a Mercator-vetületet alkalmazzuk, hiszen  $\xi_{f_1}^*$  értéke alig kedvezőbb, mint az EOVS esetében. A hossztorzulási viszonyokat a 6.6. ábra mutatja.



6.6. ábra. A  $\xi_{f_2}(p)$  az  $m = 1$  esetben

### Az ország középső területére koncentrálva

A harmadik esetben azt szeretnénk elkerülni, amit az optimális vetület esetén tapasztaltunk, nevezetesen, hogy az ország középső sávjában (a hengervetület segédegyenlítője környékén)  $\xi(p)$  értéke meghaladja az  $1/10\,000$ -et. A vetületi kezdőpontot meghagyva, csak a redukciós tényezőt változtatva ezt az alábbi paraméterekkel érhetjük el úgy, hogy a  $\xi^*$  értéke alig romlik az optimálishoz képest:

$$m = 0,9999000005,$$

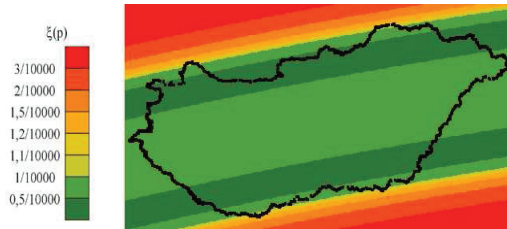
$$\varphi_0 = 48,4205621109^\circ,$$

$$\lambda_0 = 17,7071567991^\circ.$$

Ekkor

$$\xi_{f_3}^* = 0,0001226835.$$

A hossztorzulási viszonyokat a 6.7. ábra mutatja.



6.7. ábra. Az ország középső területén a  $\xi_{f_3}(p)$  értéke  $1/10\,000$  alatt marad

### Nagy területen nagyon kedvező vetület

A negyedik esetben egy olyan vetület adódik, amelynek az a szerencsés tulajdonsága van, hogy az ország területének a nagy részén a lineármódulus 1-től való eltérése 0,5/10 000 alatt marad. Ennek persze az az ára, hogy  $\xi^*$  értéke nem annyira kedvező. Javaslatom az alábbi paraméterhalmaz:

$$m = 0,99995,$$

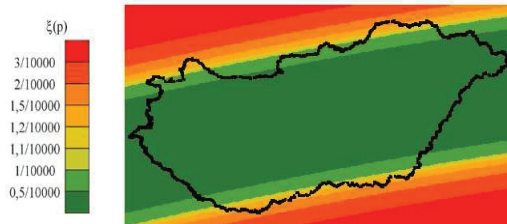
$$\varphi_0 = 48,4205621109^\circ,$$

$$\lambda_0 = 17,7071567991^\circ.$$

Ekkor

$$\xi_{f_4}^* = 0,0001726941.$$

Vagyis jelentősen megnőtt  $\xi^*$  értéke. A hossztorzulási viszonyokat a 6.8. ábra mutatja.



6.8. ábra. Az ország nagy részén a  $\xi_{f_4}(p)$  értéke 0,5/10 000 alatt marad

### 6.2.3. Konklúzió

EOv esetén az optimalizálás eredményeit a következőképpen lehet összefoglalni.

Megfontolandó, hogy a gömbvetület paraméterét érdemes-e megváltoztatni, mert az optimalizálással elért javulás elenyésző. Ha a hengervetületnél csak a vetületi méretarány-tényező értékét optimalizáljuk, akkor is jelentős javulást tapasztalunk. Ha ezen kívül még a vetületi kezdőpontot is elmozgatjuk, és optimális helyen vesszük fel, akkor a lineármódulus 1-től való eltérésének maximuma az eredetihez képest kevesebb mint a felére csökkenthető.

## 7. fejezet

# A Hotine-féle vetület optimális paraméterezése

### 7.1. A Hotine-féle vetület

Az ellipszoid alapfelületű, ferdetengelyű, szögtartó hengervetület általános képletét Martin Hotine adta meg [Hotine, 1947]. Hiperbolikus függvények segítségével tette ezt meg, amit Snyder hozott zárt alakra [Snyder, 1979]. A vetület jelentőségét számunkra az adja, hogy ezt a vetületet támogatják a térinformatikai szoftverek, mégpedig paraméterezhető módon. Ahogy azt a [Molnár, Timár, 2002] cikk is tárgyalja, az EOVS sok szoftverben nem definiálható pontosan (ld. 6.1.3. fejezet), így a szerzők a Hotine-vetület egy, az EOVS-t legjobban közelítő paraméterezését ajánlják. Ez adta az ötletet, hogy érdemes megvizsgálni, hogy ha nem az EOVS-t akarjuk helyettesíteni ezzel a vetülettel, hanem különböző igényeknek megfelelően keressük az általa nyújtott legkedvezőbb lehetőségeket, akkor mit lehet elérni.



### 7.1.1. A Hotine-féle vetület paraméterezése

A vetületet többféle megközelítéssel lehet megadni. Ez a megközelítés csak az elméleti hengerpalást elhelyezésének definiálását jelenti.

Tetszőleges megközelítés esetén szükség van a redukciós tényező ( $m$ ) megadására. A hagyományokat követve az  $m = 1$  esetet nevezzük „érintő” elhelyezésnek.

A hengerpalást helyének pontos helyzetét a redukciós konstans ismerete mellett 3-féle módon szokás leírni:

- a vetület segédegyenlítőjén (középvonalán) megadott két pont ellipszoidi koordinátaival  $(\Phi_1, \Lambda_1, \Phi_2, \Lambda_2)$ ,
- a vetületi kezdőponttal  $(\Phi_0, \Lambda_0)$  és a középvonal azimutjával  $(\alpha_0)$ ,
- a segédpólus koordinátaival (segédpóluson az elméleti hengerfelület forgástengelyének Gauss-gömbi dőfélpontját értjük).

Első ránézésre a fenti 3 eset paraméterszámban különbözik, hiszen az első esetben 4, a másodikban 3, a harmadikban pedig 2 érték definiálja a henger elhelyezkedését. A valóságban azonban ez csak 2 független paraméter minden esetben. A második esetben nyugodtan rögzíthetjük az azimutot mondjuk  $90^\circ$ -nak, a kezdőpont koordinátáinak változtatása tetszőleges hengerelhelyezést meg tud valósítani. Ugyanezzel a jelenséggel találkoztunk a 6.2.2. fejezetben, és ott a 6.3. ábra jól mutatja a helyzetet. Az pedig világos, hogy két gömbi pontra illeszkedő főkört megadhatunk az egyik ponttal és a főkör pontbeli érintőjének azimutjával is, így az első esetben is tulajdonképpen csak két független paraméter marad.

Az optimalizálás során tehát 3 paraméter vizsgálata indokolt. A  $\Phi_0, \Lambda_0, \alpha_0$  hármas bármely tagját rögzíthetnénk az általánosság igényének feladása nélkül, így ebből a háromból marad két paraméter, amikhez csatlakozik még a redukciós konstans. A számolások egyszerűsítése és a jobb áttekinthetőség érdekében a

$$\Lambda_0 = 0^\circ \tag{7.1.1}$$

önkényes választást teszem. Mivel a hosszúságot továbbra is a gellérthegyi meridiántól mérjük, így ez azt jelenti, hogy a vetületi kezdőpontot ezen a meridiánon választjuk.

### 7.1.2. A Hotine-féle vetület egyenletei

A Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetületnek azt a változatát írom le itt, ahol a henger definiálása a vetületi kezdőpont és a középvonal (a Gauss-gömb és a henger érintő főkörének) azimutjának megadásával történik. A képletekben  $a$  és  $e$  az alapfelületi ellipszoid megfelelő értékei,  $m$  a redukciós tényező,  $(\Phi_0, \Lambda_0)$  a vetületi kezdőpont koordinátái,  $\alpha_0$  a középvonal azimutja a vetületi kezdőpontban,  $(\Phi, \Lambda)$  pedig egy tetszőleges ellipszoidi pont.

Elsőként a lineármódulus kiszámításához szükséges lépéseket közlöm:

$$\begin{aligned}
B &= \sqrt{\frac{1 + e^2 \cos^4 \Phi_0}{1 - e^2}} \\
A &= amB \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \Phi_0} \\
D &= \frac{B\sqrt{1 - e^2}}{\cos \Phi_0 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi_0}} \\
F &= D + \operatorname{sgn}(\Phi_0) \sqrt{D^2 - 1} \\
G &= \frac{F - \frac{1}{F}}{2} \\
t(\Phi) &= \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2} \right)}{\left( \frac{1 - e \sin \Phi}{1 + e \sin \Phi} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
t_0 &= t(\Phi_0) \\
E &= F t_0^B \\
Q &= \frac{E}{t^B(\Phi)} \\
S &= \frac{Q - \frac{1}{Q}}{2} \\
\gamma_0 &= \arcsin \frac{\sin \alpha_0}{D} \\
\Lambda_K &= \Lambda_0 - \frac{\arcsin(G \operatorname{tg} \gamma_0)}{B} \\
V &= \sin(B(\Lambda - \Lambda_K)) \\
u &= \frac{A}{B} \operatorname{arctg} \left( \frac{S \cos \gamma_0 + V \sin \gamma_0}{\cos(B(\Lambda - \Lambda_K))} \right)
\end{aligned}$$

Ezek alapján a lineármódulus:

$$l(\Phi, \Lambda) = \frac{A \cos \frac{Bu(\Phi, \Lambda)}{A} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}{\cos \Phi \cos(B(\Lambda - \Lambda_K))}.$$

Ha a vetületi egyenletekre is szükségünk van, akkor még az alábbi számítá-

sokat kell elvégezni:

$$\begin{aligned} T &= \frac{Q + \frac{1}{Q}}{2} \\ U &= \frac{-V \cos \gamma_0 + S \sin \gamma_0}{T} \\ v &= \frac{A \ln \left( \frac{1-U}{1+U} \right)}{2B} \end{aligned}$$

Ezek alapján a vetületi egyenletek:

$$\begin{aligned} X &= v \cos \alpha_0 + u \sin \alpha_0 + X_0 \\ Y &= u \cos \alpha_0 + v \sin \alpha_0 + Y_0, \end{aligned}$$

ahol  $X_0$  és  $Y_0$  ad lehetőséget a vetületi kezdőpont síkbeli eltolására.

### 7.1.3. A lineármódulus kiszámítása

A Hotine-féle vetület egyenletei meglehetősen komplikáltak, de az optimalizáláshoz csak a lineármódulus értékére van szükségünk, a vetületi egyenletek nem játszanak közvetlen szerepet. A lineármódulus az alábbi képlettel számítható:

$$l(\Phi, \Lambda) = \frac{A \cos \frac{Bu(\Phi, \Lambda)}{A} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}{\cos \Phi \cos (B(\Lambda - \Lambda_K))}.$$

Ebben a képletben  $A, B$  és  $\Lambda_K$  csak a vetület globális paramétereitől függ (alapfelületként választott ellipszoid, illetve a vetületi kezdőpont és a redukációs tényező), az  $u$  függvény azonban függ az adott ponttól is, vagyis  $(\Phi, \Lambda)$ -től.

#### 7.1.4. A vizsgálat esetei

Az előző fejezetben rögzített paraméterezést felhasználva 4 esetet látok érdekesnek az optimalizálásra.

A korábbi esetekben a vetületi kezdőpont helyének korlátozását is érdekesnek találtam az alaposabb vizsgálatra. Ennek ott az volt az oka, hogy azok a vetületek hagyományokkal rendelkeznek Magyarországon és kezdőpontjuk rögzített. Azonban a Hotine-vetület topográfiai alkalmazásának nincsenek hazai hagyományai. Ennek ellenére érdemes megvizsgálni azt az esetet, amikor a középvonal kvázi kelet-nyugati irányú az ország területén, vagyis a vetületi kezdőpontban a középvonal azimutja  $90^\circ$ , így a vetületi kezdőpontban a középvonal kelet-nyugati irányú.

Ennek megfelelően a fenti négy eset mindegyikében az optimalizálás paraméterei közé tartozik a vetületi kezdőpont szélessége ( $\Phi_0$ ).

A 4 vizsgált eset az alábbi:

- A redukciós konstans 1 ( $m = 1$ ), a vetület középvonala „kelet-nyugati” irányú ( $\alpha = 0^\circ$ ).
- A redukciós konstans 1 ( $m = 1$ ), nem precízen fogalmazva „érintő” elhelyezésű a vetület.
- A vetület középvonala „kelet-nyugati” irányú ( $\alpha_0 = 0^\circ$ ).
- Teljes optimalizálás, vagyis mind a 3 paraméter szabadon választható.

Mivel ennek a vetületnek nincsenek hagyományai a magyarországi térképezésben, ezért az alapfelület tekintetében sincs megkötve a kezünk. Két

viszonylag korszerű ellipszoid esetén végzem el az optimalizálást. Az egyik az EOVS alapfelületétől is szolgáló IUGG'67-es ellipszoid, a másik pedig az egyre szélesebb körben elterjedő GPS-rendszerek alapfelületétől szolgáló WGS'84 ellipszoid. Ennek megfelelően minden esetben 2-2 optimális vetületet találunk.

A vizsgálatok során az derült ki, hogy ennél a vetületnél sem jelent lényeges eltérést, hogy az IUGG'67 vagy a WGS'84 ellipszoidot használjuk alapfelületként. Minden vizsgált esetben minimálisan jobb a WGS'84, ezért a torzulási viszonyokat bemutató ábrákat csak ehhez a verzióhoz készítettem el. Az IUGG'67 esetén szinte pont ugyanígy nézne ki minden ábra.

## 7.2. Az optimális paraméterezések

Az optimalizálás során 3 paramétert,  $m$ -et,  $\Phi_0$ -t és  $\alpha_0$ -t kell jól megválasztani. A speciális esetek során ezek közül néhányat a fent említett szempontok miatt rögzítünk. Így a konkrét esetekben 1, 2 vagy 3 paraméter optimalizálása szükséges. Az optimalizálás során a 7.1.1. egyenlet érvényben van, ezt külön nem említem minden esetben.

### 7.2.1. „Érintő” elhelyezés, „kelet-nyugati” középvonallal

Ebben az esetben rögzített, hogy

$$\begin{aligned} m &= 1 \\ \alpha_0 &= 90^\circ, \end{aligned}$$

így mindössze  $\Phi_0$  megválasztása a kérdés. Vagyis egy egyváltozós függvény globális minimumát keressük. A numerikus optimalizálás eredményeképpen

az alábbi értéket kapjuk.

**IUGG'67**

$$\Phi_0 = 47,1745035623^\circ,$$

ekkor  $\xi^*$  értéke:

$$\xi_{h_1}^* = 0,0003129649.$$

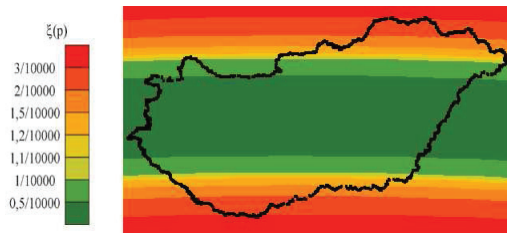
**WGS'84**

$$\Phi_0 = 47,1742390003^\circ,$$

ekkor  $\xi^*$  értéke:

$$\xi_{h_1}^* = 0,0003129247.$$

A hossztorzulási viszonyokat a 7.1. ábra mutatja.



7.1. ábra. A legjobb „érintő” elhelyezésű, kelet-nyugati középvonalú Hotine-vetület hossztorzulási viszonyai

### 7.2.2. A legjobb „érintő” elhelyezés

Az „érintő” elhelyezés azért érdekes, mert ekkor az ország középső területén egységesen nagyon jók a hossztorzulás értékei. Az előbb kapott 3/10 000-et

meghaladó értékeket jelentősen lehet javítani azzal, hogy a vetület középvo-  
nalát elforgatjuk. Ebben az esetben tehát mindössze az  $m = 1$  megkötés áll  
fenn, és  $\Phi_0, \alpha_0$  értékekre történik az optimalizálás.

### IUGG'67

$$\Phi_0 = 47,0805115739^\circ$$

$$\alpha_0 = 76,8548289258^\circ$$

ekkor  $\xi^*$  értéke:

$$\xi_{h_2}^* = 0,0002226697.$$

### WGS'84

$$\Phi_0 = 47,0807735143^\circ$$

$$\alpha_0 = 76,8552474207^\circ$$

ekkor  $\xi^*$  értéke:

$$\xi_{h_2}^* = 0,0002227001.$$

A hossztorzulási viszonyokat a 7.2. ábra mutatja.

### 7.2.3. A legjobb „kelet-nyugati” középvonalú elhelyezés

Ez az elhelyezés azért érdekes, mert ekkor az azonos hossztorzulású pontok  
nagyjából azonos szélességi körre esnek. Mivel itt az  $m = 1$  feltételt nem  
kötjük ki, így egy „redukált” vetületet kapunk, a torzulásmentes paralelkörök  
között hosszrövidülés, azok két külső oldalán hossznagyobbodás lép fel. Mivel  
ily módon még kedvezőbb értékeket kapunk, mint az előző esetben, ebből lát-  
szik, hogy a redukciós konstans szabad választása erősebben befolyásolja a





7.2. ábra. A legjobb „érintő” elhelyezési Hotine-vetület hossztorzulási viszonyai

vetület torzulási viszonyait, mint a középpont azimutjának szabad megválasztása.

Ebben az esetben tehát mindössze az  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  megkötés áll fenn, és  $\Phi_0, m$  értékekre történik az optimalizálás.

#### IUGG'67

$$\Phi_0 = 47,1742393401^\circ$$

$$m = 0,99984356224084^\circ$$

ekkor  $\xi^*$  értéke:

$$\xi_{h_3}^* = 0,0001564379.$$

#### WGS'84

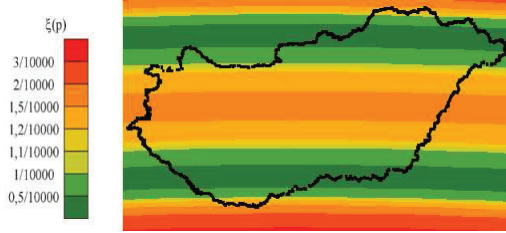
$$\Phi_0 = 47,1701276543^\circ$$

$$m = 0,99984258676572^\circ$$

ekkor  $\xi^*$  értéke:

$$\xi_{h_3}^* = 0,0001574127.$$

A hossztorzulási viszonyokat a 7.3. ábra mutatja.



7.3. ábra. A legjobb kelet-nyugati középvonalú Hotine-vetület hossztorzulási viszonyai

#### 7.2.4. A teljes optimalizálás

A teljes optimalizáláson azt értjük, hogy egyetlen paraméterre sem teszünk megkötést. Ennek megfelelően ebben az esetben fogjuk a legkedvezőbb  $\xi^*$  értékeket kapni. Az optimalizálás eredményéből látható, hogy a redukciós konstans és a középvonal azimutjának együttes változtatása sokkal jobb eredményt ad, mint ha ezt a két értéket külön-külön hagyjuk csak optimalizálni.

**IUGG'67**

$$\Phi_0 = 47,0807746051^\circ$$

$$\alpha_0 = 76,8551746612^\circ$$

$$m = 0,99988874246683^\circ$$

ekkor  $\xi^*$  értéke:

$$\xi_{h_4}^* = 0,00011141786.$$

WGS'84

$$\Phi_0 = 47,0814876567^\circ$$

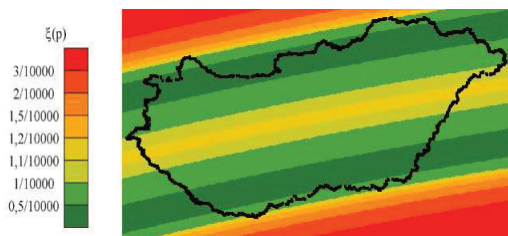
$$\alpha_0 = 76,7908231774^\circ$$

$$m = 0,99988865002527^\circ$$

ekkor  $\xi^*$  értéke:

$$\xi_{h_4}^* = 0,0001113505.$$

A hossztorzulási viszonyokat a 7.4. ábra mutatja.



7.4. ábra. A legjobb Hotine-vetület hossztorzulási viszonyai

## 8. fejezet

# Komplex függvények használata

Az eddigiekben csak már létező vetületeket vizsgáltam, és azok alapvető tulajdonságait nem változtatva kerestem kedvezőbb vetületeket.

Ennek a megoldásnak előnye, hogy a jól megszokott vetületeket használjuk lényegében, csak néhány konstans értékét változtatjuk meg.

Hátránya viszont, hogy erősen korlátozza a szóba kerülő vetületek körét az optimalizálás során, így nagy valószínűséggel ezen az úton nem tudjuk megtalálni az összességében legkedvezőbb vetületet.

Ebben a fejezetben egy olyan módszert vázolok, amivel az összes lehetséges vetület között tudjuk keresni az optimálisat. Vagyis ezzel a technikával elméletileg meg tudjuk kapni a lehető legjobb vetületet. Gyakorlatban azonban ennél kicsit rosszabb a helyzet, mert a számítási kapacitás ma sem korlátlan és ez limitálja a vizsgálatok lehetőségeit.

Továbbra is feltesszük, hogy Magyarország a vizsgált terület, és  $\xi^*$  értékét szeretnénk minimalizálni.

## 8.1. A módszer

A módszer alapja az, hogy egy komplex differenciálható függvény tulajdonképpen egy szögtartó leképezést valósít meg síkról a síkra [Petruska, 1992]. Ezt úgy kell érteni, hogy a  $z = u + vi$  komplex számnak megfelel az  $(u; v)$  pont a síkban, és az  $g(z) = x + yi$ -nek szintén ilyen módon az  $(x; y)$  pont a képsíkban. Így valósul meg a sík pontjainak a síkba való leképezése. Ha pedig a  $g$  függvény a számunkra fontos tartományon komplex értelemben differenciálható és a derivált a tartomány egyetlen pontjában sem 0, akkor  $g$  szögtartó leképezését adja az értelmezési tartománynak.

Természetesen a topográfiában Magyarország területének ábrázolása esetén nem használhatunk sík alapfelületet. Ezért még egy gondolatra szükség van a módszer használatához. Mégpedig arra, hogy első lépésben valamilyen szögtartó vetülettel le kell képeznünk a képfelület megfelelő részét a síkba. Ezt a leképezést komponálva a holomorf komplex függvénnyel, szintén szögtartó leképezését kapjuk az eredeti képfelületnek.

A holomorf komplex függvényeket csak polinom alakban keressük. Tudjuk ugyanis, hogy a

$$g(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$$

alakú függvények akárhányszor differenciálhatóak a teljes komplex síkon. Azt is tudjuk, hogy az első derivált

$$g'(z) = \sum_{k=1}^n k c_k z^{k-1}.$$

Ez azért fontos, mert a derivált értékének abszolútértéke adja meg a  $g$  leképezés során fellépő pontbeli hossztorzulást. A derivált ugyanis azt jelenti, hogy egy

ilyen együtthatójú lineáris függvénnyel lehet lokálisan legjobban közelíteni az eredeti függvényt, de egy komplex számmal szorzás geometria jelentése forgatva nyújtás. A forgatás a hossztorzulás szempontjából indifferens, a nyújtás mértéke pedig épp a szorzó komplex szám, esetünkben  $g'(z)$ , abszolútértéke.

Ennek megfelelően egy adott pontban a teljes hossztorzulást úgy tudjuk kiszámítani, hogy vesszük az első lépésben alkalmazott vetület esetén felépő lineármodulus értékét a pontban, és ezt megszorozzuk az aktuális  $|g'(z)|$  értékkel.

## 8.2. A sztereografikus vetület transzformálása

Alkalmazzuk az előző fejezetben leírt módszert egy konkrét esetben. A kiindulásként használt vetület, aminek segítségével a forgási ellipszoidról szögtartó módon képezzük le a síkba, a kettős vetítést használó, legjobb sztereografikus projekció (4.2.3. fejezet). Ebben az esetben a vetület paraméterei:  $m = 0,99978681311325$ ,  $\varphi_0 = 47,44688959^\circ$ ,  $\lambda_0 = 0,41979448^\circ$ . Nevezzük ezt a vetületet itt is  $f_3$ -mal, ekkor

$$\xi_{f_3}^* = 0,0002131722.$$

Vagyis ha az  $f(z) = z$  komplex függvényt alkalmazzuk a transzformáció során (ami azt jelenti, hogy nem transzformálunk), akkor  $\xi^*$  értéke  $0,0002131722$  lenne.

Ezt az  $f_3$  leképezést kell komponálni egy  $g$  komplex polinommal úgy, hogy  $\xi^*$  értékét tekintve a legkedvezőbb vetületet kapjuk. A komponálás itt azt jelenti, hogy először elvégezzük az  $f_3$  leképezést és a kapott képpontokra

alkalmazzuk  $g$ -t. Vagyis a képfelület  $P$  pontjához a  $g(f_3(P))$  pontot rendeljük hozzá.

A számítások során egyre több tagú polinomokkal kísérleteztem. 7-tagú polinomokkal tudtam még emberi időn belül befejezni az optimalizálást. Ekkor  $g$ -t a

$$g(z) = \sum_{k=1}^7 c_k z^k$$

alakban keressük. A konstans tagot el lehet hagyni, mivel a derivált számításakor nem játszik szerepet. Márpedig a vizsgálat során csak a derivált a lényeges, hiszen az adja a lineármódulus egyik szorzótényezőjét.

Ekkor tehát a paramétereink 7 komplex számra ( $c_k$ -k) korlátozódnak. Ez valós paramétereket tekintve 14 darab. Azonban érdemes még két paramétert hozzávennünk ehhez a 14-hez, mert jelentősen lehet javítani vele az optimalizálási algoritmus sebességét. Ez a paraméter szintén egy komplex szám, amivel eltoljuk az egész síkot, mielőtt  $g$ -t alkalmaznánk. Ha tetszik, gondolhatunk  $g$ -re így:

$$g(z) = \sum_{k=1}^7 c_k (z - z_0)^k,$$

ahol  $z_0$  az eltolást megtestesítő komplex szám.

Legyen  $c_k = a_k + b_k i$  és  $z_0 = x_0 + y_0 i$ , ekkor az optimalizálás 16 paramétere a következő:  $x_0, y_0, a_1, \dots, a_7, b_1, \dots, b_7$ .

Ennyi paraméter esetén már nehézkesen működik a „downhill simplex” módszer. Próbálkozni kell megfelelő kiindulási vektorral, illetve a módszer paraméterezésével is megfelelően kell megválasztani, amire a kísérletezésen kívül nem találtam jó módszert. Az algoritmust használva sikerült találni egy kifejezetten jó eredményt, de nem sikerült meggyőződnöm arról, hogy

ebben az esetben tényleg ez az optimum.

Az eredményt az alábbi táblázat foglalja össze:

	$x_0$	$y_0$
	0,05560210518187	0,05824474116217
$k$	$a_k$	$b_k$
1	0,99635334695539	0,09090252169034
2	-0,00200131050072	-0,01223982908280
3	-0,04714867233514	-0,03930747341471
4	-0,01301195754629	-0,01441162957689
5	0,00483123953589	0,00646703861843
6	0,00436139984230	0,00515656578937
7	0,00548461902297	0,00614843783434

Ha alapfelületnek a sztereografikus vetületnél megszokott Bessel-ellipszoidot vesszük, és innen képezünk le a  $h(\Phi, \Lambda) = g(f_3(\Phi, \Lambda))$  függvénnyel, akkor  $\xi^*$  értékre az alábbi kedvező számot kapjuk:

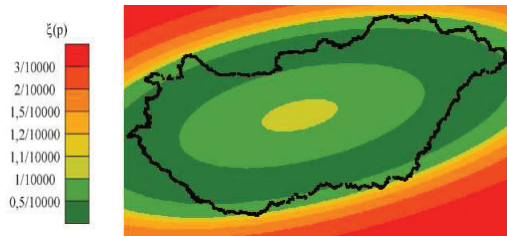
$$\xi_h^* = 0,0001052676.$$

Fontos leszögezni, hogy a tartomány egyetlen pontjában sem 0 a komplex polinom deriváltja, így ténylegesen a sík egy szögtartó leképezését valósítja meg.

A 8.1. ábra mutatja  $\xi$  értékeinek alakulását ezen vetület esetében.

Az ábrán az a tendencia figyelhető meg, hogy az adott tagú, optimális komplex polinom megpróbálja a sztereografikus vetület koncentrikus körökből álló izovonalait az országhatárnak megfelelően torzítani. 7-ed fokú polinnal ez még csak elég csekély mértékben sikerül, de ha lényegesen nagyobb



8.1. ábra.  $\xi$  értékei a  $h = g \circ f_3$  vetület esetén

lenne a foksám, akkor várhatóan az izovonalak sokkal „párhuzamosabban” futnának az országhatárral. Feltehetően ez minél jobban sikerülne, annál kisebb lenne  $\xi^*$  értéke is. Ezt abból sejttem, hogy a 7-ed fokú polinom előtt kisebb foksámokkal is próbálkoztam, és minél több tagot tudtam bevenni a polinomba, annál kisebb lett  $\xi^*$  értéke.

Felmerül a jogos kérdés, hogy miért a nem túl kedvező sztereografikus projekcióból indultam ki. Lambert-féle szögtartó kúpvetület segítségével sokkal jobb kiindulási vetületet is lehetne választani. Ez igaz, azonban az optimalizálás során a sztereografikus vetületet alapul véve sikerült a legjobb eredményt elérni. Ennek háttérében az állhat, hogy igazából mindegy, hogy melyik vetületből indulunk ki, ha polinom helyett a teljes hatványsorra tudnánk optimalizálni. Ez azonban nyilván nem igaz, nem tudunk végtelen sok, de még nagyon sok együtthatót sem meghatározni. Ezért van szerepe a kiindulási vetületnek, mert így már a kis foksámú polinomokkal is jó eredményt lehet elérni.

## 9. fejezet

# A vizsgálatok eredményének összefoglalása

Tekintsük át röviden, hogy milyen eredményt hozott az átfogó vizsgálat.

### 9.1. Használatban lévő vetületek

Első lépésben nézzük meg a két használatban lévő vetületcsaládot. Ezek esetében mekkora javulást lehet elérni a paraméterek optimalizálásával? Az alábbi táblázat mutatja a használatban lévő vetület  $\xi^*$  értékét  $\xi_f^*$ -gal jelölve, illetve a  $\xi^*$  szempontjából optimális vetület ugyanilyen értékét  $\xi_{f_{\text{mod}}}^*$ -dal jelölve. Az értékek 1/10 000-ben értendők a könnyebb összehasonlítás kedvéért.

Vetület	$\xi_f^*$	$\xi_{f_{\text{mod}}}^*$
Sztereografikus vetület	5,266615	2,131722
EOV	2,562075	1,113391

Mindkét esetben kevesebb mint a felére sikerült ezzel a módszerrel csökkenteni a  $\xi^*$  értéket, ami jelentős változásnak mondható. Főleg az EOv esetében, hiszen itt ezzel a módszerrel majdnem sikerül elérni a bővös 1/10 000-es határt.

## 9.2. A redukciós konstans jelentősége

Vizsgáljuk most meg a vetületek esetében, hogy csupán a redukciós konstans optimalizálása mekkora javulást okoz.

	$\xi_f^*$	$\xi_f^*$
Sztereografikus vetület	5,266615	2,638120
Ellipszoidi sztereografikus vetület	4,141809	2,127864
Lambert-Gauss vetület	3,080577	1,539859
EOV	2,562075	1,630874
Hotine-féle vetület	3,129247	1,574127

A fenti értékekből jól látható, hogy a redukciós konstans megfelelő megválasztása nagyon sokat javít a vetületek hossztorzulási tulajdonságain. Ez azért nagyon fontos tanulság, mert a redukciós tényező megváltoztatása a lehető legegyszerűbb feladat egy vetület esetében, mindössze egyetlen konstans szorzót jelent a vetületi egyenletekben. Ettől ráadásul a térképek rajzolata egyáltalán nem változik meg, mindössze a méretarányuk módosul.

### 9.3. Az optimális vetületek

A redukciós tényezőn kívül egyéb paraméterek is megváltoztatásra kerültek a vizsgálat során. Ezek már jelentősebb mértékben módosítják a vetületet, de az alapelvek és ezen túl a vetületi egyenletek is szerkezetileg ugyanazok maradtak.

Az előbbi táblázatot egészítsük ki egy oszloppal, ami tartalmazza a  $\xi^*$  értékeket a teljes optimalizálás esetében. A teljes optimalizáláson azt értjük, hogy az adott vetület összes, a disszertációban tárgyalt paraméterét optimalisan állítjuk be. A  $\xi^*$  értékek itt is 1/10 000-ben értendők.

	Alaphelyzet	Redukciós konstanssal	Teljes optimalizálás
Sztereografikus vetület	5,266615	2,638120	<b>2,131722</b>
Ellipszoidi sztereografikus	4,141809	2,127864	<b>2,127864</b>
Lambert-Gauss vetület	3,080577	1,539859	<b>1,109383</b>
EOV	2,562075	1,630874	<b>1,113391</b>
Hotine-féle vetület	3,129247	1,574127	<b>1,113505</b>
Komplex vetület			<b>1,052676</b>

A táblázat alapján láthatjuk, hogy a redukciós tényező okozza az igazi áttörést a hossztorzulások csökkentésében. Azonban az egyéb paraméterek is fontos szerepet játszanak, hiszen a 3 korszerű vetület esetében még majd' 50%-kal csökkent  $\xi^*$  értéke.

Az is érzékelhető a táblázatból, hogy az 1/10 000-es maximális  $\xi$  érték teljesítésére is van remény. A fenti 3 elterjedt vetület jó paraméterezése is majdnem teljesíti ezt a kritériumot, és ezek a vetületek természetesen csak

egy nagyon szűk körét érintik a lehetséges függvényeknek.

A komplex függvényt használó konstrukció már csak alig 5%-kal marad el ettől az elvárástól, és számítási kapacitás hiányában, elég korlátozott komplex függvények kerültek csak be az optimalizálás körébe.

Ennek alapján az is látható, hogy egy olyan teljes optimalizálás, ami nem köti meg a vetület típusát, hanem tetszőleges, az 1.1. fejezetben elvárt tulajdonságokat teljesítő  $f$ -ek körében optimalizál, azzal a reménnyel kecsegtet, hogy van olyan vetület, ami a mai Magyarország területén nem lépi át az  $1/10\,000$ -es  $\xi$  értéket sehol.

## 10. fejezet

### Javíthatók ezek az eredmények?

A disszertációban szereplő optimumok ténylegesen optimumok azon a körön belül, ahol a vizsgálatokat végeztük. (Minimális hibák elképzelhetők, amik a többváltozós szélsőérték-keresés algoritmusából, illetve annak implementációjából adódnak.)

Az igazán érdekes kérdés az, hogy ha az összes szögtartó vetület között keressük az optimumot, akkor tudunk-e ezeknél a vetületeknél kedvezőbbet találni.

#### 10.1. Egyéb lehetséges módszerek

##### 10.1.1. Komplex függvények

A 8. fejezetben leírt módszert kiterjedtebb formában lehetne alkalmazni. Gyorsabb számítógéppel, illetve egy hatékonyabb többváltozós szélsőérték kereső algoritmussal jóval több tagú polinomokkal is lehetne kísérletezni.

A lehető legjobb vetületet meg lehetne találni ezzel a módszerrel, hiszen a sztereografikus projekciónak a legjobb vetületet adó transzformációja felírható hatványsor alakban. Vagyis elég nagy számítási kapacitás esetén ennek a hatványsornak vehetjük egy közelítő polinomját, ami egyrészt megtalálható a módszerrel, másrészt az így számított koordinátaértékek hibája az optimumhoz képest már elhanyagolhatóan kicsi.

Egy másik lehetőség, hogy a megfelelő differenciálható komplex függvényeket nem csak polinom alakban keressük. Elképzelhető, hogy egy más típusú megközelítés (pl. Fourier-sor) könnyebben adna jó eredményt és kisebb számításigénnyel is kivitelezhető lenne az optimalizálás, sőt a kapott vetületi egyenletek számítása is egyszerűbb lenne.

### 10.1.2. Csebisev tétele

Csebisev 1856-ban publikált tétele (ld. a 11.2. fejezet) karakterizációt ad egy adott terület optimális szögtartó leképezésére. E szerint az optimális vetület rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy az ábrázolandó terület határán konstans a lineármodulus értéke. A további optimalizálás iránya lehetne az, hogy ezt a tulajdonságot felhasználva keresnénk megfelelő vetületet.

Tudomásom szerint Csebisev tétele és bizonyítása nem szerepelt eddig magyar nyelvű publikációkban és felhasználása eddig a magyar topográfiában nem történt meg. Ezért tartottam fontosnak, hogy a Függelékben közöljem a pontos tételt és annak bizonyítását is.

A probléma bonyolult, még egyetlen konkrét országra sem sikerült ilymódon megtalálni az optimális vetületet tudomásom szerint. Ennek egyik oka,

hogy a valódi országhatárok komplikált görbék, nehézkes a velük való számolás. Meg lehetne próbálni egy matematikailag könnyebben kezelhető tartománnyal közelíteni az ország területét, és bízni abban, hogy az így kapott területen optimális vetület nagyon kedvező tulajdonságokat mutat a valódi célterületen is.

## 10.2. Érdekes eredmények

### 10.2.1. Hill javaslata

Hill 1908-as cikkében [Hill, 1908] javasolt egy módszert, ami a Csebisev-tételt felhasználva megadja a legjobb szögtartó vetületet, aminek értelmezési tartománya egy foktrapéz. Ebben az esetben természetesen a foktrapéz határoló vonalain (a paralelkörökön és a meridiánokon) konstans a lineármódulus értéke.

Magyarország esetében ez a megoldás nem kecsegtet túl jó eredménnyel, hiszen az ország területe nem közelíthető jól egy foktrapézzal. Ennek ellenére érdemes lenne megvizsgálni, hogy ez a megközelítés mennyire kedvező, mert vélhetően jobb, mint bármely jelenleg alkalmazott vetületi rendszer.

### 10.2.2. Egy spanyol eredmény

Az egyik szép alkalmazást Bermejo és Otero publikálta [Bermejo, Otero, 2005], amelyben teljes Spanyolország területére adnak egy nagyon kedvező szögtartó vetületet. A szerzőpáros a Spanyolországban széles körben elterjedt UTM-hez hasonlítja vetületét és az összehasonlítás alapjául az ún. Csebisev-torzulást



$(\delta_0)$  választja.

Csebisev tételét felhasználva sikerült olyan vetületet kreálniuk, aminek Csebisev-torzulása harmada az UTM megfelelő értékének.

Ez az eredmény is azt mutatja, hogy érdemes ezt az irányt alaposabban megvizsgálni, mert nagyon komoly lehetőségeket rejt.

## 11. fejezet

### Függelék

#### 11.1. Nelder-Mead „downhill simplex” módszer

##### 11.1.1. Az eredeti eljárás

Az algoritmus vázlatosan a következőképpen működik. Adott egy  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, aminek a globális minimumát keressük. (A módszer lényegében ugyanez, ha maximumot keresünk.) Ekkor az  $n$ -dimenziós térben keresünk egy pontot, ahol  $f$ -nek szélsőértéke van. Ehhez felvesszünk  $n + 1$  kiindulási pontot  $\mathbb{R}^n$ -ben, amik egy szimplex csúcsait adják. Ezekben a pontokban kiszámítjuk a függvényértékeket, amik a következők:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{n+1}).$$

Minden lépésben változtatjuk a szimplex csúcsait, egy tipikus lépésben csak egyet (így csak egy helyen kell kiszámítani az új függvényértéket), illetve előfordulhat, hogy egy kivételével az összes pontot lecseréljük. A fenti sorból látszik, hogy az első lépésben az  $x_1$  pont számunkra a legkedvezőbb, az  $x_2$  a

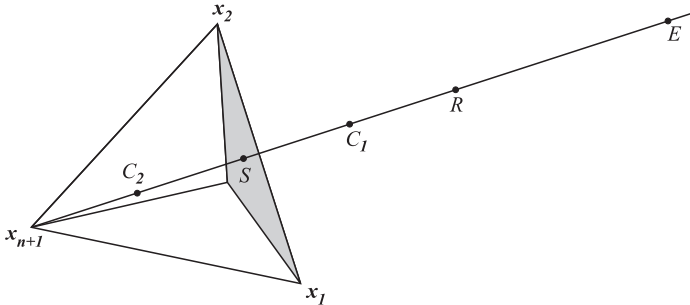
második legjobb és  $x_{n+1}$  a legrosszabb. Ennek megfelelően  $x_{n+1}$  lecserélésére teszünk kísérletet, hiszen a szimplexszel egyre közelebb akarunk kerülni a globális minimumhoz.

Tekintsük a szimplexnek azt az lapját, ami nem tartalmazza az  $x_{n+1}$  pontot. Legyen ennek a lapnak a súlypontja

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Tekintsük a következő 4 pontot (ld. 11.1. ábra):

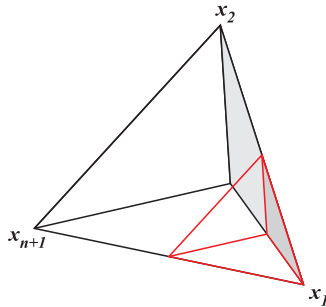
- $R$  -  $x_{n+1}$  tükörképe  $S$ -re ( $-1$ -szeres hasonlósági transzformált).
- $E$  -  $x_{n+1}$   $-2$ -szeres hasonlósági transzformáltja  $S$ -re.
- $C_1$  -  $x_{n+1}$   $-\frac{1}{2}$ -szeres hasonlósági transzformáltja  $S$ -re.
- $C_2$  -  $x_{n+1}$   $\frac{1}{2}$ -szeres hasonlósági transzformáltja  $S$ -re.



11.1. ábra. A szimplex és a 4 fontos pont

Attól függően, hogy ebben a négy pontban hogyan viselkedik  $f$ , fogjuk kiválasztani, hogy a következő lépésben melyik szimplexet vizsgáljuk. Két dolog következhet:

- Kicseréljük  $x_{n+1}$ -et a négy pont  $(R, E, C_1, C_2)$  valamelyikére
- Az egész szimplexet  $\frac{1}{2}$ -szeresére kicsinyítjük az  $x_1$  pontból (ld. 11.2. ábra).



11.2. ábra. A szimplex kicsinyítése

Nézzük pontosan mikor, melyik pontot, illetve pontokat cseréljük le a szimplexben.

Ha

$$f(x_1) < f(R) < f(x_n),$$

valgis az  $R$  pontban a függvényérték a eddigi legjobb és az eddigi második legrosszabb pont függvényértékei közé esik, akkor  $x_{n+1}$  pont helyett  $R$  lesz az aktuális szimplex csúcsa.

Ha

$$f(R) \leq f(x_1),$$

vagyis az  $R$  pont legalább annyira kedvező, mint az eddigi legjobb pont, akkor megvizsgáljuk  $E$ -ben a függvényértéket. Ha  $f(E) < f(R)$ , akkor az  $x_{n+1}$  pont helyére  $E$ -t tesszük a szimplexben, egyébként ebben az esetben is  $R$ -rel helyettesítjük a legrosszabb pontot.

Ha

$$f(R) \geq f(x_n),$$

akkor máshol kell kedvezőbb pontot keresni. Ebben az esetben jön számításba a  $C_1$  vagy a  $C_2$  pont. Ha

$$f(x_{n+1}) > f(R) \geq f(x_n),$$

akkor kiszámítjuk az  $f(C_1)$  függvényértéket. Ha viszont

$$f(R) \geq f(x_{n+1}),$$

akkor  $f(C_2)$  érték lesz érdekes. Amennyiben a megfelelő  $f(C_i)$  érték kedvezőbb, mint az eddigi legrosszabb csúcs, vagyis

$$f(C_i) < f(x_{n+1}),$$

akkor  $x_{n+1}$ -et  $C_i$ -vel helyettesítjük. Ha ez sem teljesül, vagyis így is kedvezőtlenebb pontot találtunk, akkor a legjobb pontból ( $x_1$ ) felére kicsinyítjük a teljes szimplexet (ld. 11.2. ábra).

Ennek a módszernek azon túl, hogy csak a függvényértékeket használja az optimalizáláshoz, nagy előnye, hogy az első típusú iterációnál csak egyetlen új pontban kell függvényértéket számolni. Ezen kívül fontos megemlíteni,

hogy ez a módszer lehetővé teszi, hogy az eljárás „ne essen csapdába” egy lokális minimumnál, hanem van esély egy ilyen minimumhelyet elkerülni és megtalálni a globális szélsőértéket. Ehhez szükség van arra, hogy az indulási értékek jól legyenek megválasztva.

A módszer onnan kapta a nevét, hogy szemléletesen úgy lehet elképzelni az algoritmust, hogy a szimplexek iterációs sorozata megtestesíti egy szimplex „lesiklását” (downhill) a függvénygrafikon felületén, egészen a minimumig.

### 11.1.2. Az eljárás paraméterezése

A fenti eljárásnál 4 paraméter fontos szerepet játszik. Ez alapján általánosítható a fenti módszer, és sok esetben ezeknek a paramétereknek a jó megválasztása segít a szélsőértékek hatékony megtalálásában.

Ez a 4 paraméter a következő:

- Az  $R$  pont kiszámításához használt hasonlósági konstans. Az eredeti algoritmus során ennek értéke  $-1$ . Ez az érték bármilyen negatív számra változtatható.
- Az  $E$  pont kiszámításához használt hasonlósági konstans. Az eredeti algoritmus során ennek értéke  $-2$ . Ez az érték bármilyen  $-1$ -nél kisebb számra változtatható.
- A  $C_1$  és  $C_2$  pontok kiszámításához használt hasonlósági konstans. Az eredeti algoritmus során ennek értéke  $\frac{1}{2}$ . Ez az érték bármilyen  $0$  és  $1$  közötti számra változtatható.
- A szimplex kicsinyítésekor használt hasonlósági konstans. Az eredeti

algorithmus során ennek értéke  $\frac{1}{2}$ . Ez az érték bármilyen 0 és 1 közötti számra változtatható.

A szélsőértékek meghatározása során szükség volt ezeknek a paramétereknek a megfelelő megválasztására, az eredeti algoritmus ugyanis sokszor nem vezet eredményre. Kísérletezéssel kell találni egy elfogadható függvényértéket, amiről sejthető, hogy a globális minimum közelében található. Majd pedig a fenti konstansokat úgy kell megválasztani, hogy a globális szélsőértékhez közeli kezdőszimplexből kiindulva, a szimplex egyre kisebb mértékű változtatását eredményezze az eljárás. Magát az eljárást érdemes sokszor, különböző kiinduló szimplexekkel, és különböző eljárás-paraméterekkel inicializálva végrehajtani.

## 11.2. A Csebisev-tétel és bizonyítása

Csebisev a legjobb szögtartó vetületekkel foglalkozó tételét 1856-ban mondta ki [Csebisev, 1856]. A tételhez bizonyítást nem közölt, ez tudomásom szerint írásban először 1896-ban jelent meg Demetrius Grave tollából. Grave újabb bizonyítást adott rá 1911-ben. Olvasható egy bizonyítás Milnor [Milnor, 1969] cikkében is. Mindkét bizonyítás arra az esetre vonatkozik, amikor a vetület alapfelülete gömb. Bermejo és Otero 2005-ös cikkében [Bermejo, Otero, 2005] szintén olvasható egy bizonyítás, mely a tétel egyik felét Grave eredeti ötletét felhasználva igazolja, de forgási ellipszoid alapfelületre.

### 11.2.1. A tétel

A tétel állítása a következő: *Ha  $U$  egyszeresen összefüggő tartomány a gömb felületén, aminek határa kétszer differenciálható görbe, akkor (egy síkbeli hasonlóságot leszámítva) egyértelműen létezik egy szögtartó vetület a gömbről a síkra, amire a*

$$\frac{\sup_U l(x)}{\inf_U l(x)}$$

*hányados minimális. Ez a „lehető legjobb” szögtartó vetület úgy jellemezhető, hogy  $U$  határán a  $\sigma(x)$  értéke konstans.*

A tételben  $l(x)$  jelöli az  $x$  pontban a vetület során fellépő lineármódulust.

Világos, hogy egy síkbeli hasonlóság nem változtatja meg sem a szögtartás tényét, sem pedig a  $\frac{\sup_U l(x)}{\inf_U l(x)}$  értékét, ezért ez az egyértelműség is elég a térképezési felhasználásban.

### 11.2.2. A tétel bizonyítása

Többféle bizonyítás is fellelhető a tételre, de számomra a legegyszerűbb Milnor bizonyítása [Milnor, 1969]. Ezt a bizonyítást vázlatosan közlöm.

Bizonyítás nélkül felhasználjuk az alábbi lemmát:

*Egy adott  $l(x)$  pozitív valós értékű akkor és csak akkor hossztorzulási függvénye egy  $f$   $U$ -n értelmezett, szögtartó vetületnek, ha  $l(x)$  kétszer differenciálható és kielégíti a*

$$r^2 \Delta \log l(x) = 1$$

*egyenletet.*

Itt  $U$  a gömbfelszín egy tartománya,  $r$  a gömb sugara, *hossztorzulási*



*függvényen* pedig azt értjük, ami egy szögtartó vetület esetén minden pont-hoz hozzárendeli az adott pontban fellépő linármodulus értékét,  $\Delta$  pedig a Laplace-Beltrami operátor, vagyis

$$r^2 \Delta g = g_{\varphi\varphi} - \operatorname{tg} \varphi \cdot g_{\varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot g_{\lambda\lambda},$$

ahol  $g$  egy kétszeresen differenciálható, valós függvény. (Ez a szokásos Laplace-operátor általánosítása.)

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$g(x) = \log l(x).$$

Ismeretes, hogy ebben az esetben az  $r^2 \Delta g = 1$  egyértelműen megoldható azzal a peremfeltétellel, hogy az  $x \in \partial U$  ( $\partial U$  az  $U$  határát jelöli) esetén  $g(x) = 0$ , vagyis  $l(x) = 1$ , ha  $x \in \partial U$  [Garabedian, 1964].

Legyen  $h$  egy tetszőleges  $g$ -től különböző függvény, ami kétszer folytonosan differenciálható és kielégíti az  $r^2 \Delta h = 1$  egyenletet az  $U$  belsejében. Ekkor azt kell belátnunk, hogy

$$\sup h - \inf h \geq \sup g - \inf g,$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $h = g + C$  valamilyen  $C$  konstanssal. Ehhez mindössze annyi kell, hogy az eredeti  $\frac{\sup l(x)}{\inf l(x)}$  hányadost a bevezetett logaritmus különbséggé alakítja.

Mivel  $\Delta g = \frac{1}{r^2}$ , így  $\Delta g > 0$ , vagyis a szubharmonikus függvényekre vonatkozó maximum-elv miatt  $g$  nem veheti fel a maximumát  $U$  belsejében. Mivel azonban  $U$  lezártja ( $\overline{U}$ ) kompakt, így  $g$  felveszi a maximumát  $\overline{U}$ -n. Ebből következik, hogy  $g$  maximuma a határon van. Így

$$\sup_{x \in \operatorname{int} U} g(x) = 0,$$

hisz  $g(x) = 0$ , ha  $x \in \partial U$ .

Tekintsük a  $h - g$  függvényt. Mivel a  $\Delta$ -operátor lineáris, így  $\Delta(h - g) = 0$ , így szintén a harmonikus függvényekre vonatkozó maximum-elv alapján  $h - g$  csak akkor veheti fel a maximumát az  $U$  belsejében, ha konstans. Tegyük fel, hogy  $h - g$  nem konstans, és tekintsünk egy  $x_i$   $U$ -beli pontsorozatot, amire

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (h(x_i) - g(x_i)) = \sup_{x \in U} (h(x) - g(x)).$$

Mivel  $h - g$  nem konstans, így a pontsorozat határértéke eleme  $U$  határának, azaz  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = X$ -re igaz, hogy  $X \in \partial U$ .

Feltehetjük, hogy

$$C = \sup h$$

véges, hiszen ellenkező esetben triviálisan teljesül a bizonyítandó állítás. Ekkor tudjuk, hogy  $g(x_i) \rightarrow 0$ , hiszen a pontsorozat határértéke  $U$  határpontja, és a határon  $g$  értéke konstans 0. Illetve nyilván minden  $i$ -re  $h(x_i) \leq C$ .

Mivel  $x_i$ -t úgy választottuk, hogy  $\sup(h - g) = \lim(h(x_i) - g(x_i))$ , és  $\lim h(x_i) \leq C$ , illetve  $\lim g(x_i) = 0$ , ezért

$$\sup(h - g) \leq C.$$

Vagyis minden  $x \in U$ -ra

$$h(x) \leq g(x) + C,$$

amiből következik, hogy

$$\inf h \leq \inf g + C.$$

De tudjuk, hogy  $\sup g = 0$  és  $\sup h = C$ , így ez egyben azt is jelenti, hogy

$$\sup h - \inf f \geq \sup g - \inf g.$$

Ezzel a tétel állítását bizonyítottuk.

### 11.2.3. A tétel felhasználása

Első ránézésre úgy tűnik, hogy a tétel nem pontosan azt optimalizálja, amire a topográfiai vetületek esetén szükségünk van, vagyis a

$$\max_{x \in U} |1 - l(x)| \text{ -et.}$$

Azonban a két optimum lényegében azonos, eltekintve attól, hogy a tétel megenged még egy hasonlósági transzformációt a síkban. De pont ezt felhasználva a tétel által szolgáltatott optimumok (hiszen nem egyetlen optimum van) közül ki tudunk választani egyet, ami a  $\max_{x \in U} |1 - l(x)|$  értékét is minimalizálja.

Ha mindkét eredeti vetületi egyenletet megszorozzuk  $c$ -vel, akkor az  $l(x)$  értéke is mindenhol  $c$ -szeresére változik. Ennek megfelelően, ha van egy  $l(x)$  optimális hossztorzulás függvény, akkor a  $c \cdot l(x)$  is optimális, a Csebisev-tételnél definiált értelemben.

Vegyünk egy tetszőlegeset a tétel által adott optimumok közül. Ezt a hossztorzulás függvényt meg tudjuk szorozni egy  $c$  konstanssal úgy, hogy

$$\frac{\sup l(x) + \inf l(x)}{2} = 1$$

teljesüljön. Ha ez teljesül, akkor erre  $\max_{x \in U} |1 - l(x)|$  értéke is minimális lesz. Ha ugyanis lenne egy ebből a szempontból kedvezőbb vetület  $h$ , akkor az  $l_h(x)$  értékekre igaz lenne, hogy

$$\inf l(x) < \inf l_h(x) \leq \sup l_h(x) < \sup l(x).$$

Ekkor azonban  $\frac{\sup l_h(x)}{\inf l_h(x)} < \frac{\sup l(x)}{\inf l(x)}$  lenne, ami ellentmond annak, hogy az  $l(x)$  optimális volt.

---

Felmerül a kérdés, hogy konkrét optimális vetületek megtalálását hogyan segíti a tétel, hiszen a karakterizáció (a határoló görbén konstans a lineár-modulus) nem tűnik nagy segítségnek.

# Köszönetnyilvánítás

A disszertáció megszületésében nagyon fontos szerepet játszott témavezetőm, Györfly János, akinek ezúton is nagyon köszönöm szakmai és emberi segítségét, támogatását.

Munkahelyemnek, az MTA SZTAKI Internet Technológiák és Alkalmazások Központnak is nagyon hálás vagyok, hiszen az itt meglévő erőforrásokat, infrastruktúrát is felhasználhattam a kutatáshoz.

A Csebisev-tétel kapcsán fontos segítséget kaptam Kálmán Tamás és Lippner Gábor matematikusoktól, ezúton köszönöm nekik is.

# Irodalomjegyzék

[Bermejo, Otero, 2005] M. Bermejo - J. Otero: *Minimum conformal mapping distortion according to Chebyshev's principle: a case study over peninsular Spain*

Journal of Geodesy, Vol 79., 2005.

[Bugayevskiy, Snyder, 1995] Lev M. Bugayevskiy, John P. Snyder: *Map Projections - A Reference Manual*

Taylor&Francis, 1995., London

[Csebisev, 1856] Pafnutyij Csebisev: *Sur la construction des cartes géographiques*

Saint Petersburg, 1856.

[Érdi-Krausz] Érdi-Krausz György: *Földrajzi vetületek: Matematikai kartográfia*

Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1960.

[Fasching, 1909] Fasching Antal: *A magyar országos háromszögelések és részletes felmérések új vetületi rendszerei*

A M. Kir. Pénzügyminisztérium megbízásából kiadta Fasching Antal, 1909., Budapest

- [Garabedian, 1964] Paul R. Garabedian: *Partial Differential Equations*  
Wiley, New York, 1964.
- [Györffy] Györffy János: *Rendszeres vetülettan*  
<http://mercator.elte.hu/~gyorffy/jegyzete/jegyzete.html>
- [Hazay, 1954] Hazay István: *Földi vetületek*  
Akadémiai Kiadó, 1954., Budapest
- [Hill, 1908] G. W. Hill: *Application of Tchebyshef's Principle in the Projection of Maps*  
The Annals of Mathematics Vol. 10, No. 1, 1908.
- [Hotine, 1947] Martin Hotine: *The orthometric projection of the spheroid*  
Empire Survey Review 9., 1947.
- [Karsay, 1962] Karsay Ferenc: *Alkalmazott vetülettan*  
Tankönyvkiadó, egyetemi jegyzet. Budapest, 1962.
- [Kuska, 1960] František Kuska: *Matematická Kartografia*  
Slovenské Vydavateľstvo Technickej Literatúry, Bratislava, 1960.
- [Lambert, 1772] Johann Heinrich Lambert: *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik*  
Berlin, 1772.
- [Mescerjakov] G. A. Mescerjakov: *Tyeoretyicseskije osnovü matyematyicseszkij kartografii*  
Nyedra, Moszkva, 1968.

- [MÉM OFTH, 1975] Mezőgazdasági és Élelmezésügyi Minisztérium Országos Földügyi és Térképészet Hivatal: *Vetületi Szabályzat az Egységes Országos Vetületi Rendszer alkalmazására*  
Szabályzat, 1975., Budapest
- [Milnor, 1969] John Milnor: *A Problem in Cartography*  
The American Mathematical Monthly, Vol 76., No. 10., 1969.
- [Molnár, Timár, 2002] Molnár Gábor, Timár Gábor: *Az EOY-koordináták nagy pontosságú közelítése Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülettel*  
Geodézia és Kartográfia, 2002/3. p. 18-22.
- [Nelder, Mead, 1965] Nelder, J. A., Mead, R.: *A Simplex Method for Function Minimization*  
Computer Journal Vol 7., pp 308-313., 1965.
- [Petruska, 1992] Petruska György: *Komplex függvénytan*  
Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.
- [Qihe, 1989] Qihe H. Yang, John P. Snyder, Waldo R. Tobler: *Map Projection Transformation*  
Taylor&Francis, 2000.
- [Snyder, 1979] John P. Snyder: *Calculating map projections for the ellipsoid*  
American Cartographer 6(1), 1979.
- [Snyder, 1985] John P. Snyder: *Computer-Assisted Map Projection Research*  
U.S. Geological Survey Bulletin 1629, 1985.
- [Snyder, 1987] John P. Snyder: *Map Projections - A Working Manual*



- United States Government Office, 1987., Washington
- [Stegena, 1988] Stegena Lajos: *Vetülettan*  
Tankönyviadó, Budapest, 1988.
- [Téglásy, 2001] Téglásy Örs: *Térinformatikai célú GPS mérések hazai alkalmazásának feltételei*  
Diplomamunka, Budapest, 2001.
- [Thomas, 1952] Paul D. Thomas: *Conformal Projections in Geodesy and Cartography*  
U.S. Coast and Geodetic Survey Spec. Pub. no. 251, 1952.
- [Varga, 1983] Varga József: *A Lambert-féle szögtartó kúpvetületről*  
Geodézia és Kartográfia, 35(1)
- [Varga, 1997] Varga József: *Vetülettan. (az Alaphálózatok I. javított kiadása)*  
Műegyetemi Kiadó. Egyetemi jegyzet 91244, 1997.
- [Varga, 2005] Varga József: *Volt-e Ivanicsi (Ivaniči) Sztereografikus vetület?*  
Geomatikai Közlemények VIII. Sopron, 2005. 45 - 51. old.
- [Varga] Varga József: *A vetületnéküli rendszerektől az UTM-ig*  
[http://www.agt.bme.hu/staff\\_h/varga/Osszes/Dok3uj.htm](http://www.agt.bme.hu/staff_h/varga/Osszes/Dok3uj.htm)